Die mechanischen Prinzipien

der

Ingenieurkunst und Architektur

von

Heinrich Moseley,

Professor der Physik und Astronomie an der Universität zu London ꝛc.

Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen

von

H. Scheffler.

Zweiter Theil.

Mit 500 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1845.

Inhaltsverzeichniß

des zweiten Theiles.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie der Stabilität der Stein- und Erdkonstruktionen.

Erdkonstruktionen.

Der Gewölbbogen.

Zusätze zum vierten Abschnitte.

Fünfter Abschnitt.

Von der Festigkeit der Materialien.

Sechster Abschnitt.

Vom Stoße.

Zusätze zum sechsten Abschnitte.

Anhang.

Druckfehler.

Seite 17 Zeile 3 von oben lies w statt ω.

» 18 » 13 von oben lies dem Werthe statt den Werth.

» 21 » 16 von oben lies gleich μ_1 statt mit μ_1.

» 104 » 18 von oben lies Brechungspunkte statt Berechungs-punkte.

» 110 » 3 von unten lies Setzt man behuf st. Setzt behuf.

» 116 » 12 von oben lies $(\Psi-\Theta)\sin\Psi$ statt $(\Psi-\Theta\Psi)\sin$.

» 116 « 20 von oben lies $(\Psi-\Theta)$ statt $\Psi-\Theta)$.

» 123 » 10 von unten lies $<\frac{1}{2}\alpha$ statt $>\frac{1}{2}\alpha$.

» 148 » 5 von oben lies Kurve statt Kurre.

» 175 » 7 von unten lies wieder statt weiter.

» 207 » 9 von unten lies $\mathrm{EJ}\frac{d^2y}{dx^2}$ statt $_{\mathrm{EJ}}\frac{d^2y}{dx^2}$.

» 215 » 2 von unten lies in Beziehung zu statt in Beziehung.

» 222 » 10 von oben lies $\frac{p_1^2}{\mathrm{J}}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{P}_1}\ \frac{p_1}{\mathrm{R}}$ statt $\frac{\mathrm{P_I}^2}{\mathrm{J}}=\frac{\mathrm{E}}{p_\mathrm{I}}\ \frac{\mathrm{P_I}}{\mathrm{R}}$.

» 238 » 1 von oben lies s statt 3.

» 242 » 3 von unten lies $\left(e^{\frac{2\mu a}{\mathrm{T}}}-e^{\frac{-2\mu a}{\mathrm{T}}}\right)$ statt $\left(e^{\frac{2\mu a}{\mathrm{T}}}=e^{\frac{-2\mu a}{\mathrm{T}}}\right)$.

» 244 » 6 von oben lies $\sqrt{\mathrm{T}^2+v^2}$ statt $\sqrt{\mathrm{T}^2+u^2}$.

» 252 » 6 von unten lies $[(\mu_1+\mu_2)+(\mu_1-\mu_2)z^2]$ statt $[(\mu_1+\mu_2)(\mu_1-\mu_2)z^2.]$

» 287 » 1 von unten lies $0{,}2071\,a$ statt $0{,}22112\,a$.

» 300 » 10 von oben lies ϑ statt δ.

» 301 » 12 von oben lies ϑ statt δ.

» 316 » 3 von unten $2g(\mathrm{W}_1+\mathrm{W}_2)$ statt $2g\,\mathrm{W}_1+\mathrm{W}_2)$.

» 321 » 7 » » lies $\frac{\mathrm{L}_2\mathrm{V}_1}{\mathrm{K}_2\mathrm{E}_2}$ statt $\frac{\mathrm{L}_2\mathrm{V}_1}{\mathrm{K}_2\mathrm{E}_1}$.

» 329 » 6 » oben lies $\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{K}_1\mathrm{E}_1}+\frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{K}_2\mathrm{E}_2}$ statt $\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{K}_1\mathrm{E}_1}=\frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{K}_2\mathrm{E}_2}$.

Vierter Abschnitt.

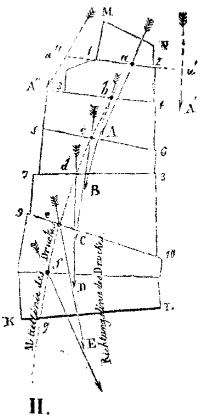
Die Theorie der Stabilität der Stein- und Erdkonstruktionen.

Allgemeine Bedingungen für die Stabilität einer Konstruktion von unverbundenen Steinen.

Irgend eine Konstruktion kann dem Drucke, welchem sie unterworfen ist, entweder dadurch nachgeben, daß einige ihrer Flächen aufeinander gleiten, oder daß sich dieselben um ihre Kanten drehen; die Untersuchung der Bedingungen, unter welchen diese beiden Umstände eintreten werden, umfaßt die ganze Frage über die Stabilität der Konstruktionen.

Die Mittellinie des Druckes.

§. 285. Eine Konstruktion MNLK, welche aus einer einzigen Reihe unverbundener Steine von beliebigen Formen besteht,



auf welche beliebige Druckkräfte wirken, werde von irgend einer geometrischen Fläche 12 durchschnitten, und es sei aA die Resultante aller derjenigen Kräfte, welche auf Einen der beiden Theile, z. B. auf den oberen MN21, wirken. Denkt man sich, jene Durchschnittsfläche ändere allmählig ihre Form und Lage, sodaß sie nach und nach mit allen gemeinschaftlichen Berührungsflächen 34, 56, 78, 9 10, ... der Steine, welche die Konstruktion bilden, zusammenfalle; so seien bB, cC, dD, eE, ... die ähnlich, wie aA, genommenen Resultanten, die jenen verschiedenen Durchschnittsflächen angehören.

Bei einer jeden solchen Lage der Durchschnittsfläche wird die Richtung der erwähnten Resultante diese Fläche entweder innerhalb der Masse der Konstruktion, oder wenn man sich die Fläche erweitert denkt, außerhalb derselben durchschneiden. Findet der Durschnitt außerhalb der Masse der Konstruktion statt; so wird der Gesammtdruck, welcher in der Richtung der obigen Resultante wirkt, eine Drehung des vorhin beschriebenen Theiles der Konstruktion um die Kante, welche in der gemeinschaftlichen Berührungsfläche mit dem anderen Theile liegt, herbeiführen: findet der Durchschnitt jedoch innerhalb der Masse der Konstruktion statt; so wird eine solche Drehung nicht erfolgen können.

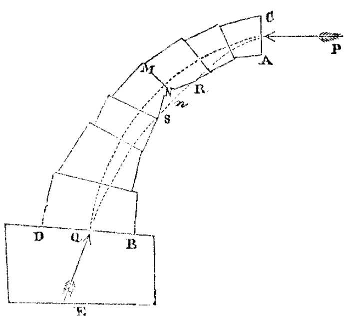
Fiele also z. B. die Richtung der Resultante aller auf den Theil NM12 wirkender Kräfte in die Linie $a'A'$, welche die Erweiterung der gemeinschaftlichen Berührungsfläche 12 außerhalb der Masse der Konstruktion in a' durchschneidet; so würde der gesammte auf jenen Theil in der Richtung $a'A'$ wirkende Druck, denselben um die Kante 2 der Berührungsfläche 12 zu drehen streben, und ebenso würde diese Resultante, wenn ihre Richtung $a''A''$ wäre, eine Drehung der Masse um die Kante 1 hervorbringen. Ist nun aber aA die Richtung der Resultante; so wird sowenig eine Drehung der Masse um die Eine, wie um die andere der beiden Kanten von 12 erfolgen können.

Hiernach ist also die Bedingung, daß keine zwei Theile der Masse durch die auf das System wirkenden Kräfte um eine Kante ihrer gemeinschaftlichen Berührungsfläche gedrehet werden, in der anderen enthalten, daß die Richtung der Resultante für eine jede Lage der Durchschnittsfläche, die Letztere innerhalb der Masse der Konstruktion durchschneide.

Wenn man sich denkt, daß die Durchschnittsfläche nach und nach eine unendliche Menge verschiedener Lagen 12, 34, 56,... annehme, und daß $a, b, c, d, \ldots$ die Durchschnittspunkte dieser Fläche in den verschiedenen Lagen mit den Richtungen aller entsprechenden Resultanten seien; so kann die Kurve $abcdef\ldots$, welche diese Durchschnittspunkte miteinander verbindet, die Mittellinie des Druckes genannt werden, indem sie alle Punkte enthält, durch welche die Richtung des mittleren Druckes geht, der sich auf die sukzessiv einander folgenden Durchschnittsflächen äußert.

Diese Linie kann durch die Methoden der Analysis für eine jede Konstruktion von einer bestimmten geometrischen Form, deren Theile sich in Flächen von ebenfalls bestimmten geometrischen Formen berühren, vollständig ermittelt werden. Umgekehrt kann die geometrische Form der Konstruktion gefunden werden, wenn die Form jener Linie und die Lage geben ist, welche dieselbe in der Konstruction einnehmen soll. Ebenso kann auch, wenn gewisse Bedingungen sowol hinsichtlich der Form der Konstruktion, wie der der Mittellinie des Druckes gegeben sind, alles Übrige festgestellt werden, was zum gleichzeitigen Bestehen jener Bedingungen nothwendig ist.

Wenn **PQ** die Mittellinie des Druckes der Konstruktion **PQ** ist; so leuchtet ein, daß wenn diese Linie die Fläche irgend eines Durchschnittes oder irgend einer Fuge **MN** in einem außerhalb der Masse belegenen Punkte *n* durchschnitte, die Resultante der auf den Theil **CMN** wirkenden Kräfte durch den Punkt *n* gehen und diesen Theil um denjenigen Punkt **N** der Durchschnittslinie der Fuge mit der Oberfläche der Konstruktion, welcher dem Punkte *n* am nächsten liegt, drehen würde.



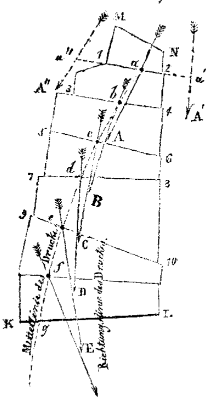
Es ist demnach eine Bedingung für das Gleichgewicht einer Konstruktion, daß die Mittellinie des Druckes die gemeinschaftliche Berührungsfläche jeder zwei angränzenden Theile der Konstruktion innerhalb der Masse der Letzteren durchschneide, oder mit anderen Worten, daß sie, ohne Ausnahme, durch eine jede Fuge der Konstruktion gehe. Diese Bedingung muß erfüllt werden, damit keine zwei solcher Theile um die Kanten ihrer gemeinschaftlichen Berührungsfläche gedrehet werden.

Die Richtungslinie des Druckes.

§. 286. Außer der Bedingung, daß keine zwei Theile der Konstruktion um die Kanten ihrer gemeinschaftlichen Berührungsflächen gedrehet werden, eine Bedingung, welche in der Bestimmung der **Mittellinie des Druckes** enthalten ist, erfordert die Stabilität der Konstruktion aber noch die Erfüllung einer **zweiten** Bedingung. Diese letztere besteht darin, daß keine zwei Fugenflächen aufeinander **gleiten** können. Zum Bestehen dieser Bedingung ist es erforderlich, daß die **Richtung** der Resultante für eine jede gemeinschaftliche Berührungsfläche innerhalb gewisser Gränzen liege. Diese Gränzen sind durch die Oberfläche des Reibungskegels (§. 139) bestimmt, dessen Axe die Normale auf der gemeinschaftlichen Fläche (in dem oben erwähnten Durchschnittspunkte der Resultante) ist und dessen Winkel an der Spitze das Doppelte des Reibungswinkels oder desjenigen Winkels beträgt, dessen Tangente dem Reibungskoeffizienten für jene Fugenflächen gleich kommt. Liegt nun die Richtung der Resultante **innerhalb** des Reibungskegels; so werden die Berührungsflächen nicht aufeinander gleiten: liegt sie außerhalb desselben; so werden sie gleiten.

Demnach sind die **Richtungen** der aufeinander folgenden Resultanten gegen die Normalen in den Punkten, wo sie die entsprechenden Berührungsflächen durchschneiden, als wichtige Elemente der Theorie von der Stabilität der Konstruktionen zu betrachten.

Bildet daher die Linie **ABCDE** den geometrischen Ort aller



aufeinander folgenden Durchschnittspunkte der Resultanten $a\mathrm{A}, b\mathrm{B}, c\mathrm{C}, d\mathrm{D}, \ldots$; so ist die Richtung des mittleren Druckes auf einen jeden Querschnitt an dieser Linie tangent, und man kann dieselbe nach dieser Eigenschaft die **Richtungslinie des Druckes** nennen. *) Ihre geometrische Form läßt sich unter denselben Umständen, wie die der Mittellinie des Druckes, bestimmen. Zieht man von dem Punkte c, in welchem die **Mittellinie des Druckes** $abcd$ irgend eine Fuge 56 der Konstruktion durchschneidet, eine gerade Linie

*) Der englische Verfasser nennt diese Linie line of pressure, während er die

cC tangent an die Richtungslinie des Druckes ABCD; so ergibt dieselbe die Richtung des mittleren Druckes auf jene Fuge. Liegt nun diese Linie innerhalb des vorhin erwähnten Reibungskegels; so werden die beiden Theile der Konstruktion in jener Fuge nicht aufeinander gleiten: liegt sie außerhalb desselben; so wird ein Gleiten eintreten.

Hiernach ist die ganze Theorie von dem Gleichgewichte irgend einer Konstruktion in der Bestimmung der vorstehenden beiden Linien, der Mittellinie und der Richtungslinie des Druckes, enthalten, von denen die erstere den Angriffspunkt des mittleren Druckes auf einen jeden Fugenschnitt und die letztere die Richtung dieses mittleren Druckes angibt.

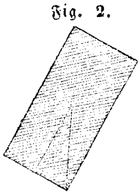
Die Bestimmung dieser beiden Linien in ihrer allgemeinsten Form liegt in dem Bereiche der Analysis. Für den Fall, wo alle gemeinschaftlichen Berührungsflächen oder Fugen Ebenen sind — der einzige, welcher sich in der Praxis darbietet — hat der Verfasser dieses Werkes die allgemeinen Gleichungen in dem sechsten Bande der Cambridge Philosophical Transactions niedergelegt.

Die Stabilität eines starren Körpers.

§. 287. Die Stabilität eines starren Körpers kann als größer oder geringer angesehen werden, jenachdem ein größerer oder geringerer Betrag von Arbeit auf denselben entwickelt werden muß, um ihn umzuwerfen oder um ihn in die Lage zu bringen, in welcher er im Begriffe ist, aus eigenem Antriebe umzufallen. Demnach ist die Stabilität eines in Fig. 1 dargestellte Körpers, welcher auf einer horizontalen Ebene ruhet, um so größer oder geringer, je größer oder geringer die Arbeit ist, welche erfordert wird, um denselben in die Lage

Fig. 1.

Fig. 2.



zuerst erwähnte Linie line of resistance nennt. Da jedoch einige deutsche Schriftsteller, namentlich der Herr Geheime Ober-Baurath Hagen, jene erstere Linie mit dem Namen der Mittellinie des Druckes bezeichnet haben; so schien es zweckmäßig, diese Bezeichnung für die line of resistance beizubehalten, und dagegen für die line of pressure den Namen der Richtungslinie des Druckes zu wählen, in welchem sich der Charakter dieser Linie ebenfalls leicht kenntlich macht.

Fig. 2 zu bringen, in welcher sein Schwerpunkt vertikal über seinem Unterstützungspunkte liegt. Nun ist diese Arbeit nach §. 60 gleich derjenigen, welche erforderlich sein würde, um das ganze Gewicht jenes Körpers auf dieselbe vertikale Höhe zu heben, auf welche sein Schwerpunkt bei dem Übergange aus der Einen Lage in die andere wirklich erhoben wird; es folgt also daß die Stabilität eines auf einer Ebene ruhenden Körpers umso größer oder geringer ist, je größer oder geringer das Produkt aus seinem Gewichte in die vertikale Höhe ist, auf welche sein Schwerpunkt gehoben werden muß, um den Körper in eine Lage zu bringen, in welcher er aus eigenem Antriebe umfallen wird.

Ist die Grundfläche des Körpers eine Ebene, und wird die vertikale Höhe seines Schwerpunktes, wenn derselbe auf einer horizontalen Ebene ruhet, durch h und der Abstand des Punktes oder der Kante, um welche er geworfen wird, von dem Fußpunkte eines aus seinem Schwerpunkte auf die Grundfläche gefällten Lothes durch k dargestellt; so ist die Höhe, auf welche der Schwerpunkt bei dem Übergange des Körpers aus der Einen in die andere Lage gehoben wird, offenbar gleich $\sqrt{h^2+k^2}-h$. Bezeichnet man daher das Gewicht des Körpers mit W und die zu seinem Umsturze erforderliche Arbeit mit U; so ist der Ausdruck

$$U = W\left[\sqrt{h^2+k^2}-h\right] \ldots \quad (381)$$

ein richtiges Maaß für die Stabilität des Körpers.

Die Stabilität einer Konstruktion.

§. 288. Es leuchtet ein, daß der Grad der Stabilität einer Konstruktion, welche aus einer beliebigen Anzahl besonderer, aber einander berührender starrer Körper besteht, durch den größeren oder geringern Abstand der Mittellinie des Druckes von ihrer äußeren Begränzungsfläche bedingt ist. Da die Konstruktion nicht eher umgeworfen werden kann, als die Mittellinie des Druckes so sehr gebeugt ist, daß sie die Begränzungsfläche durchschneidet; so wird die Wahrscheinlichkeit eines Umsturzes der Konstruktion in Folge eines außergewöhnlichen Druckes umso geringer sein, je weiter die Richtung jener Linie von dieser Fläche entfernt liegt. Der kürzeste Abstand der Mittellinie des Druckes von der äußeren Begränzungsfläche wird in den folgenden Untersuchungen mit m bezeichnet und der **Stabilitätsmodel** der Konstruktion genannt werden.

Dieser kürzeste Abstand bietet sich bei der Mauer und dem Strebepfeiler gewöhnlich in dem untersten Querschnitte dar, und es leuchtet ein, daß unter dem Punkte, wo die Mittellinie des Druckes den tiefsten Querschnitt durchschneidet, das Fundament den größten Widerstand leisten muß. Wird dieser Punkt fest unterstützt; so kann kein Setzen oder Niedersinken der Konstruktion unter dem Einflusse der Kräfte, welchen dieselbe gewöhnlich unterworfen ist, stattfinden.

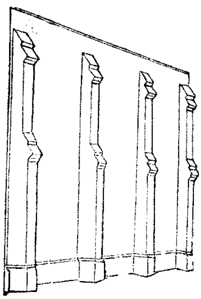
Die Mauer oder der Pfeiler.

§. 289. Die Stabilität einer Mauer.

Wenn der gegen eine Mauer angebrachte Druck auf ihre Länge gleichförmig vertheilt ist (wie z. B. bei der Außenmauer eines Gebäudes der Druck der Dachsparren vermittelst der Mauerlatten gleichförmig vertheilt ist, wenn die Sparren nicht auf Balken stehen), und man denkt sich dieselbe durch gleich weit voneinander abstehende, und auf ihrer vorderen Fläche perpendikular stehende Vertikalebenen in einzelne Theile getheilt; so sind die Bedingungen der Stabilität in Beziehung zu den sämmtlichen auf ihre ganze Länge wirkenden Kräfte offenbar dieselben, wie für einen jeden einzelnen Theil in Beziehung zu den auf die Länge dieses Theiles wirkenden Kräften. Wird also ein jeder dieser säulenförmigen Theile oder Pfeiler, in welche die Mauer durch die Vertikalebenen getheilt ist, so konstruirt, daß er unter den auf ihn wirkenden Kräften mit irgend einem Grade von Festigkeit oder Stabilität stehen kann; so wird auch die ganze Mauer mit einem gleichen Grade von Festigkeit oder Stabilität stehen, und umgekehrt.

In den folgenden Untersuchungen wird angenommen, daß diese gleichmäßige Eintheilung der Länge einer Mauer in Abständen von Einem Fuße geschehen sei, sodaß sich die Frage immer um die Stabilität eines Pfeilers von gleichförmiger oder veränderlicher Stärke drehet, dessen Dimension in der Längenrichtung der Mauer Einen Fuß beträgt.

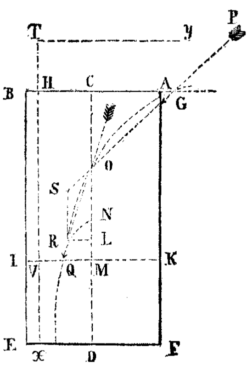
§. 290. Wenn eine Mauer durch Strebepfeiler unterstützt ist, welche gleich weit auseinander stehen; so werden die Bedingungen ihrer Stabilität denen einer stetig fortlaufenden Mauer gleich geachtet, welche man erhält wenn man sich einen jeden Strebepfeiler seitwärts erweitert denkt, bis er den zunächst folgenden trifft und dabei annimmt, daß sich das spezifische Gewicht



dieses Strebepfeilers in demselben Maaße verminderе, wie sich sein Volum vermehrt, sodaß sein absolutes Gewicht, nachdem er längs der Mauer ausgebreitet ist, dem früheren gleich bleibt. Hierdurch wird man eine zusammengesetzte Mauer erhalten, deren äußere und innere Theile verschiedene spezifische Gewichte haben, deren Gleichgewichtsbedingungen aber durch die vorstehende Hypothese nicht geändert werden.

Die Mittellinie des Druckes in einem Pfeiler.

§. 291. **ABEF** sei ein Pfeiler von gleichförmiger Stärke.



PS sei die Richtung eines gegen den Pfeiler wirkenden Druckes, welcher dessen Axe in **O** durchschneide. Nimmt man irgend einen horizontalen Querschnitt **IK**, stellt durch **ON** das Gewicht des Theiles **AKIB** des Pfeilers und durch **OS** nach demselben Maaßstabe den Druck **P** dar, und entwirft das Parallelogramm **ONRS**; so wird **OR** in Größe und Richtung die Resultante der auf den Theil **AKIB** wirkenden Kräfte darstellen (§. 3) und ihr Durchschnitt **Q** mit **IK** wird ein Punkt in der Mittellinie des Druckes sein.

Schneidet nun die Richtung PS die Linie BA (oder deren Verlängerung) in G; so sei

$$GC = k, \qquad AB = a,$$
$$CM = x, \qquad MQ = y,$$

$\angle POC = \alpha$, und μ das Gewicht eines jeden Kubikfußes des Materiales, aus welchem der Pfeiler besteht.

Zieht man RL perpendikular auf CD; so ist wegen ähnlicher Dreiecke

$$\frac{QM}{OM} = \frac{RL}{OL}.$$

Man hat aber $QM = y$, $OM = CM - CO = x - \frac{k}{\operatorname{tang}\alpha}$, $RL = \overline{RN} \cdot \sin RNL = P \sin \alpha$, $OL = ON + NL = ON + \overline{RN} \times \cos RNL = \mu a x + P \cos \alpha$; demnach

$$\frac{y}{x - \frac{k}{\operatorname{tang}\alpha}} = \frac{P \sin\alpha}{\mu a x + P \cos\alpha}$$

oder

$$y = P \frac{x \sin\alpha - k \cos\alpha}{\mu a x + P \cos\alpha} \ldots\ldots (382).$$

In dieser Formel besteht die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes für einen Pfeiler oder eine Mauer.

§. 292. Die Bedingungen, daß die Steine des Pfeilers nicht aufeinander gleiten.

Da bei der Konstruktion des Parallelogrammes ONRS, dessen Diagonale OR die Richtung des mittleren Druckes auf den Querschnitt IK bestimmt, die Seite OS, welche den Druck P in Größe und Richtung darstellt, stets dieselbe bleibt, welches auch der Querschnitt IK sei, während die Seite ON, welche das Gewicht von AKIB darstellt, in dem Maaße wächst wie IK tiefer angenommen wird; so folgt, daß der Winkel ROM fortwährend abnimmt, je tiefer IK herabsinkt. Dieser Winkel ist aber offenbar gleich dem, welchen OR mit einem Perpendikel auf IK in Q einschließt: ist derselbe also in der höchsten Lage des Querschnittes IK kleiner, als der Reibungswinkel; so wird er auch in einer jeden tieferen Lage kleiner sein, als dieser Winkel. Da nun für die höchste Lage von IK ON $= o$, also ROM $= \alpha$ ist; so sieht man, daß der Winkel, welchen die Richtung des mittleren Druckes auf irgend einen Querschnitt mit der Normalen dieses Querschnittes einschließt, kleiner sein wird, als der Reibungswinkel, sobald der Winkel α kleiner ist, als der Letztere. Solange aber jener Neigungswinkel des mittleren Druckes gegen die Normale des Querschnittes kleiner ist, als der Reibungswinkel, kann kein Gleiten der beiden durch diesen Querschnitt getrennten Theile des Pfeilers aufeinander erfolgen (§. 141). Demnach wird der Forderung, daß keine zwei Theile des Pfeilers in einem horizontalen Querschnitte auf einander gleiten, durch die einzige Bedingung ein Genüge geleistet, daß der Neigungswinkel α des Druckes P gegen die Vertikale kleiner sei, als der Reibungswinkel für die Oberflächen der Steine.

Da die Richtungen aller mittleren Resultanten durch den Punkt O gehen; so leuchtet ein, daß die Richtungslinie des Druckes (§. 286) mit jenem Punkte zusammenfällt. Hat man daher die Mittellinie des Druckes nach Gleichung (382) konstruirt; so ergibt eine von dem Punkte O aus nach einem beliebigen Punkte Q jener Kurve gezogene Gerade OQ die Richtung des mittleren Druckes auf den horizontalen Querschnitt IQK.

§. 293. Die größte Höhe des Pfeilers.

In dem Punkte, wo die Mittellinie des Druckes die äußere Mauerfläche durchschneidet, ist $y = \frac{1}{2} a$. Bezeichnet man daher mit H den entsprechenden Werth von x; so wird derselbe offenbar die größte Höhe darstellen, bis zu welcher der Pfeiler erbauet werden kann, ohne daß er von dem Drucke P umgeworfen wird. Substituirt man diese Werthe für x und y in Gleichung (382), und lös't dieselbe für H auf; so ergibt sich

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} a + k\right) \cos \alpha}{\mathrm{P} \sin \alpha - \frac{1}{2} \mu a^2} \dots \quad (383).$$

Wenn die vier Größen P, α, a, μ durch die Beziehung $\mathrm{P} \sin \alpha = \frac{1}{2} \mu a^2$ oder $a = \sqrt{\frac{2 \mathrm{P} \sin \alpha}{\mu}}$ miteinander verbunden sind;

so wird H unendlich. Hieraus folgt, daß in diesem Falle der Pfeiler unter dem Drucke P feststehen wird, zu welcher Höhe er auch aufgeführt werden möge. Wäre $\mathrm{P}\sin\alpha < \frac{1}{2}\mu a^2$ oder $a > \sqrt{\frac{2\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu}}$; so gibt das negative Zeichen, welches der Werth von H alsdann annimmt, zu erkennen, daß in diesem Falle der Pfeiler nicht umgeworfen werden könne, wie hoch man ihn auch erbauen möge, daß vielmehr zu dem Umsturze desselben außer dem Drucke P noch eine Kraft erforderlich sein würde, welche in der vertikalen Richtung seiner Axe von unten nach oben wirkte, und daß derselbe demnach in jeder beliebigen Höhe noch einen gewissen Grad von Stabilität besitzen würde (s. §. 294).

§. 294. Die Mittellinie des Druckes ist eine Hyperbel.

Multiplizirt man beide Seiten der Gleichung (382) mit dem Nenner des Bruches auf der rechten Seite; so kommt

$$y(\mu a x + \mathrm{P}\cos\alpha) = \mathrm{P}x\sin\alpha - \mathrm{P}k\cos\alpha.$$

Dividirt man diese Gleichung mit μa, transponirt und ändert die Zeichen aller Glieder; so erhält man

$$\frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu a}x - y\left(x + \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\right) = \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}k,$$

und wenn man auf beiden Seiten $\frac{\mathrm{P}^2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\mu^2 a^2}$ addirt,

$$\frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu a}\left(x + \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\right) - y\left(x + \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\right) = \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\left(k + \frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu a}\right)$$

oder

$$\left(\frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu a} - y\right)\left(x + \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\right) = \frac{\mathrm{P}\cos\alpha}{\mu a}\left(k + \frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\mu a}\right).$$

Verwandelt man nun die Koordinaten x, y, welche vorhin parallel zu den Axen **CD** und **CB** für den Anfangspunkt **C** genommen wurden, in andere x_1, y_1, welche parallel zu den Axen **TX** und **TY** oder auch parallel zu **CD** und **CA** für den Anfangspunkt **T** genommen werden, indem man

$$CH = \frac{P \sin\alpha}{\mu a} \text{ und } HT = \frac{P \cos\alpha}{\mu a}$$

annimmt, sodaß nun

$$TV = x_1 \text{ und } VQ = y_1$$

ist; so hat man

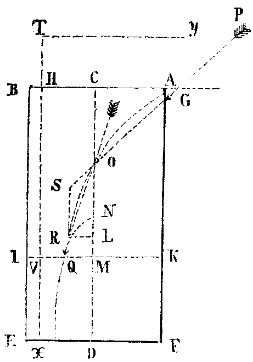
$$y_1 = VQ = VM - MQ = CH - MQ = \frac{P \sin\alpha}{\mu a} - y$$

und

$$x_1 = TV = HV + TH = x + \frac{P \cos\alpha}{\mu a}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung; so wird dieselbe

$$x_1 y_1 = \frac{P \cos\alpha}{\mu a}\left(k + \frac{P \sin\alpha}{\mu a}\right) = \text{einer konstanten Größe.}$$



Dies ist die bekannte Form der Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten **TX** und **TY** sind. Die Mittellinie des Druckes nähert sich also fortwährend der Linie TX, ohne dieselbe jedoch jemals zu erreichen, und es folgt, daß, wenn TX (wie in der seitstehenden Figur) innerhalb der Masse des Pfeilers liegt, oder wenn CH < CB, d. i.

$$\frac{P \sin\alpha}{\mu a} < \tfrac{1}{2} a \text{ oder } a > \sqrt{\frac{2P \sin\alpha}{\mu a}} \text{ ist,}$$

die Mittellinie des Druckes niemals die äußere Mauerfläche durchschneiden und der Pfeiler unter dem Drucke P stets einen gewissen Grad von Stabilität behalten wird, wie hoch derselbe auch erbauet werden möge. Dieses Resultat stimmt mit dem im vorhergehenden Paragraphe erhaltenen vollkommen überein.

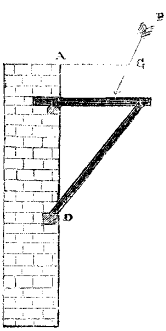
§. 295. Die Stärke eines Pfeilers unter der Bedingung, daß derselbe bei einer gegebenen Höhe eine bestimmte Stabilität besitze.

Die Größe m, welche in §. 288 der Stabilitätsmodel genannt wurde, bezeichne die kürzeste Entfernung in der Richtung der horizontalen Fugenschnitte, bis zu welcher sich die Mittellinie des Druckes der äußeren Mauerfläche nähern soll. Aus dem vorstehenden Paragraphe geht hervor, daß sich diese kürzeste Entfernung in dem untersten Querschnitte des Pfeilers darbieten wird. In diesem Querschnitte muß man daher $y = \frac{1}{2}a - m$ haben. Setzt man diesen Werth an die Stelle von y und den für die Höhe des Pfeilers gegebenen Werth h an die Stelle von x in Gleichung (382) und löst die entstehende quadratische Gleichung für a auf; so erhält man

$$a = -\left(\frac{P\cos\alpha}{2\mu h} - m\right) + \sqrt{\left(\frac{P\cos\alpha}{2\mu h} - m\right)^2 + \frac{2P}{\mu}\left[\sin\alpha - \left(\frac{k-m}{h}\right)\cos\alpha\right]} \quad \ldots\ldots (384).$$

§. 296. **Veränderung des Angriffspunktes der Kraft P, sodaß dadurch ein Pfeiler von gegebenen Dimensionen eine bestimmte Stabilität erhält.**

Es leuchtet ein, daß wenn man in Gleichung (382) $\frac{1}{2}a - m$ für y und h für x substituirt, der Stabilitätsmodel m für eine gegebene Stärke a des Pfeilers auf jeden beliebigen Werth gebracht werden kann, wenn man der Größe k einen entsprechenden Werth gibt, das heißt, wenn man den Angriffspunkt **G** des Druckes **P** in eine angemessene Entfernung von der Axe des Pfeilers bringt. Dies kann durch verschiedene Mittel erreicht werden, von denen Eines in der seitstehenden Figur dargestellt ist. Löst man demnach die Gleichung (382) für k auf; so ergibt sich



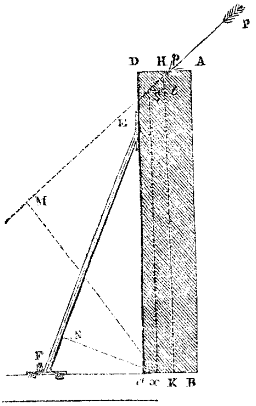
$$k = h\tang\alpha - \left(\frac{1}{a} - m\right)\left(1 + \frac{\mu a h}{P\cos\alpha}\right) \ldots (385).$$

Für das Gleichgewicht des Pfeilers ist es unter den hier gewählten Umständen erforderlich, daß die Mittellinie des Druckes die *innere* Mauerfläche in keinem unterhalb **D** belegenen Punkte durchschneide. *)

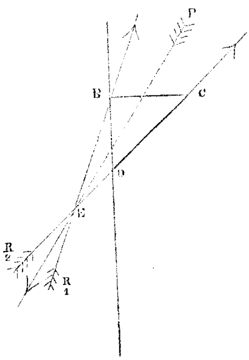
*) Der Druck **P**, welcher vermittelst der beiden Stücke **BC** und **CD** (deren eigene Ge-

Die Stabilität einer von Streben unterstützten Mauer.

§. 297. Denkt man sich den von einer jeden Strebe unterstützten Theil der Mauer und den darauf angebrachten Druck auf einen Pfeiler zusammengedrängt, dessen Dimension in der Richtung der Länge der Mauer der Breite der Strebe gleichkommt;



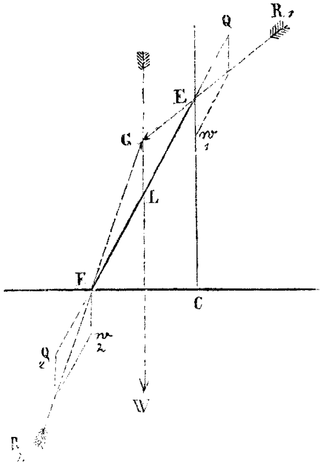
so erleiden die Bedingungen für die Stabilität der Mauer durch diese Voraussetzung offenbar keine Änderung. Nun sei **ABCD** der vertikale Durchschnitt Eines dieser Pfeiler, in welche die Mauer zerlegt ist, **EF** die gehörige Strebe, **P** der gegen den Scheitel der Mauer angebrachte Druck, R_1 der im Punkte **E** zwischen der Strebe und der Mauer sich äußernde Widerstand, **Q** dessen Komponente oder der Schub der Strebe in ihren Längenrichtung **FE**, w_1 dessen Komponente in



wichte hier unberücksichtigt gelassen sind) auf den Pfeiler übertragen wird, vertheilt sich zuvörderst auf die beiden Punkte **B** und **D**. Sind nun R_1 und R_2 die Widerstände, welche der Pfeiler in den Punkten **B** und **D** leistet; so müssen die drei Kräfte **P**, R_1 und R_2 miteinander im Gleichgewichte sein und sich demnach in Einem Punkte **E** schneiden. Zwei Kräfte, welche diesen beiden Widerständen gleich und entgegengesetzt angenommen werden, stellen demnach die Komponenten dar, in welche der Druck **P** zerlegt und auf dem Pfeiler übertragen wird. Da sich die Komponente R_2 in der Längenrichtung des Stückes **CD** fortpflanzen muß; so folgt daß die Richtung dieser Kraft die gegebene Richtung des Stückes **CD** ist. Zieht man demnach von dem Durchschnittspunkte **E** der Richtung **CD** mit der Richtung **PE** des Druckes **P** nach dem zweiten Unterstützungspunkte **B** die Gerade **EB**; so ergibt dieselbe die Richtung, in welcher die zweite Komponente von **P** oder der Widerstand des Pfeilers im Punkte **B** wirkt. Zerlegt man hierauf nach dem Parallelogramme der Kräfte den Druck **P** in zwei Kräfte R_1 und R_2, deren Richtungen mit den Linien **EB** und **EC** zusammenfallen; so erhält man die beiden erwähnten Komponenten von **P**, in deren entgegengesetzten Richtungen der Pfeiler bei **B** und **C** Widerstand leistet. Man sieht aber auch, daß die beiden einzelnen Kräfte R_1 und R_2, indem sie sich wiederum in eine einzige Kraft **P** zusammensetzen lassen, auf den Pfeiler dieselbe Wirkung hervorbringen, wie ihre Resultante **P**, und daß demnach die Bedingungen der Stabilität des Pfeilers unter der Wirkung der beiden Kräfte R_1 und R_2 dieselben sind, wie die unter der Wirkung der einzigen Kraft **P**.

der vertikalen Richtung EC, $2w$ das Gewicht der Strebe, x der Punkt, in welchem die Mittellinie des Druckes die Grundfläche der Mauer durchschneidet, $Cx=m$, $CF=b$, $\angle FEC=\beta$; im Übrigen werden die Bezeichnungen der vorhergehenden Paragraphe beibehalten.

Ist nun R_2 der Widerstand, welcher sich im Punkte F zwischen der Strebe und ihrer Unterlage äußert und Q_2, w_2 dessen Komponenten resp. in paralleler Richtung zur Strebe und in vertikaler Richtung; so leuchtet ein, daß sich an der Strebe die drei Kräfte R_1, R_2 und das Gewicht $2w$ der Strebe, dessen Richtung GW durch die Mitte L von FE geht, im Gleichgewichte erhalten müssen. Hierzu ist es nothwendig, daß sich die Richtungen der beiden Widerstände R_1 und R_2 in Einem Punkte der Vertikalen GLW durchschneiden.



Man kann die Gleichgewichtsbedingungen für dieses System aber auch dadurch entwickeln, daß man statt der Widerstände R_1 und R_2 ihre Komponenten Q, w_1 und Q_2, w_2 betrachtet, welche ebenfalls mit dem Gewichte $2w$ im Gleichgewichte sein müssen. Da nun von den fünf Kräften $Q, Q_2, w_1, w_2\ 2w$ sowol die ersten beiden, wie die letzten drei einander parallel sind; so ist es nach den Prinzipien des ersten Abschnittes dieses Werkes nothwendig, daß sich sowol die ersten beiden Kräfte Q und Q_2, wie die letzten drei w_1, w_2 und $2w$ für sich im Gleichgewichte erhalten. Demnach hat man für die Kräfte Q und Q_2, welche in derselben geraden Linie wirken, die Beziehung

$$Q = Q_2$$

und für die Kräfte w_1, w_2 und $2w$

$$w_1 + w_2 = 2w$$

und nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\overline{\mathrm{LE}}.w_1=\overline{\mathrm{LF}}.w_2, \text{ d. i. da } \mathrm{LE}=\mathrm{LF} \text{ ist,}$$
$$w_1=w_2.$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen folgt für die Komponenten der Widerstände R_1 und R_2 in vertikaler Richtung

$$w_1=w_2=w.$$

Die Kraft Q bestimmt sich nun durch die Bedingung, daß sich an dem Pfeiler folgende vier Kräfte: der Druck P, der Wistand R_1 der Strebe im Punkte E, das Gewicht μah des Pfeilers und der durch den Punkt x wirkende Widerstand des Fundamentes, oder auch, wenn man für R_1 seine beiden Komponenten Q und w setzt, daß sich die fünf Kräfte, P, Q, w, μah und der Widerstand des Fundamentes im Gleichgewichte erhalten müssen. Nimmt man daher die Momente dieser letzteren Kräfte für den in der Richtung des Widerstandes des Fundamentes liegenden Punkt x, sodaß das Moment dieses Widerstandes gleich null wird, und fällt zu diesem Ende auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Perpendikel xM und xN; so erhält man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\mathrm{P}.\overline{x\mathrm{M}}+w.\overline{x\mathrm{C}}=\mathrm{Q}.\overline{x\mathrm{N}}+\mu ah.\overline{x\mathrm{K}},$$

indem man beachtet, daß die Komponente w des Widerstandes R_1 in vertikaler Richtung von oben nach unten wirkt, also den Pfeiler in derselben Richtung um den Punkt x zu drehen strebt, wie Dies die Kraft P thut.

Nun hat man

$$x\mathrm{M}=\overline{xs}.\sin xs\mathrm{M}=(\mathrm{HK}-\mathrm{H}t)\sin\alpha=\left(\mathrm{HK}-\frac{\mathrm{H}p+st}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\sin\alpha$$
$$=h\sin\alpha-(k+\tfrac{1}{2}a-m)\cos\alpha,$$

$x\mathrm{C}=m,$

$x\mathrm{N}=(\mathrm{FC}+\mathrm{C}x)\cos\mathrm{F}x\mathrm{N}=(b+m)\cos\beta$ und

$x\mathrm{K}=\frac{1}{2}a-m;$ demnach

$$\mathrm{P}[h\sin\alpha-(k+\tfrac{1}{2}a-m)\cos\alpha]+wm=\mathrm{Q}(b+m)\cos\beta+\mu ah(\tfrac{1}{2}a-m).$$

Lös't man diese Gleichung für Q auf, und reduzirt gehörig; so kommt

$$Q = \frac{P[h\sin\alpha - (k+\frac{1}{2}a)\cos\alpha] - \frac{1}{2}\mu a^2 h + m(P\cos\alpha + \mu a h + w)}{(b+m)\cos\beta}, \ldots (386)$$

eine Gleichung, welche man auch auf die Form

$$Q = \frac{P\cos\alpha + \mu a h + w}{\cos\beta} - \frac{P[b\cos\alpha - h\sin\alpha + (k+\frac{1}{2}a)\cos\alpha] + \mu a h(\frac{1}{2}a + b) + wb}{(b+m)\cos\beta}$$

bringen kann.

Will man hierin statt der Größe $CF = b$ die Höhe $CE = c$ des Stützpunktes E der Strebe über dem Punkte C einführen; so hat man $b = c \operatorname{tang}\beta$ zu setzen, und will man den Winkel β eliminiren; so hat man $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Die vorstehende Gleichung stellt eine Beziehung zwischen den beiden Größen Q und m dar, von denen die Eine gegeben sein kann, während die andere gesucht wird. Soll z. B. die Mauer einen gewissen Grad von Stabilität besitzen, ist also m gegeben; so findet man durch jene Gleichung die Größe des Schubes Q, welchen die Strebe in der Richtung ihrer Länge äußern muß. Ein solcher Schub wird dadurch erzeugt, daß man im Punkte F die angemessenen Kräfte $Q_2 = Q$ und $w_2 = w$ anbringt, deren Resultante R_2 ist. Setzt man hierauf die beiden Kräfte Q_2 und w_2 in eine einzige zusammen; so findet man die Größe und Richtung der Kraft R_2, welche im Punkte F angebracht werden muß, um der Mauer vermittelst der Strebe den verlangten Grad von Stabilität zu geben. Zerlegt man die Kraft Q_2 in ihre horizontale und vertikale Komponente; so findet man, daß der in F erforderliche Druck auch dadurch hervorgebracht werden kann, daß man in diesem Punkte in horizontaler Richtung eine Kraft $= Q_2 \sin\beta = Q \sin\beta$ und in vertikaler Richtung von unten nach oben eine Kraft $= Q_2 \cos\beta + w_2 = Q\cos\beta + w$ anbringt. Diese letztere wird gewöhnlich dadurch erzeugt, daß man die Strebe bei F auf eine feste horizontale Unterlage setzt. Die erstere, in horizontaler Richtung von F gegen C anzubringende Kraft muß aber durch eine besondere Vorrichtung erzeugt werden.

Gibt man, umgekehrt, die bei F angebrachten Kräfte und damit die Kraft Q; so findet man mit Hülfe der Gleichung (386) den Werth von m oder den Grad der Stabilität, welchen die von der Strebe **FE** getriebene Mauer unter diesen Umständen besitzt.

Wenn der Zähler des dritten Gliedes auf der rechten Seite der obigen Gleichung eine positive Größe ist (was wahrscheinlich in allen praktischen Fällen der Fall sein wird); so nimmt der Werth von Q mit dem Werthe von m gleichzeitig ab. Nun ist aber der kleinste Werth, welchen die Größe m annehmen darf, damit die Mittellinie des Druckes an keiner Stelle die Außenseite der Mauer durchschneide, gleich null; demnach entspricht der kleinste Werth von Q (unter der Voraussetzung, daß die Strebe zur Aufrechterhaltung der Mauer nothwendig sei) den Werth von $m = o$; außerdem ist dieser kleinste Werth des Schubes der Strebe, welcher sich mit der Stabilität der Mauer verträgt, offenbar gleich dem Drucke, welchen die Strebe auszuhalten hat, wenn die Mauer einfach auf derselben ruhet, ohne daß die Strebe stärker angetrieben ist, als es zur Aufrechterhaltung der Mauer nothwendig ist.

Dieser geringste Druck oder Schub in der Richtung **FE** ist durch die Formel

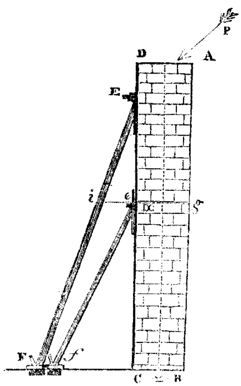
$$Q = \frac{P[h \sin\alpha - (k + \frac{1}{2}a)\cos\alpha] - \frac{1}{2}\mu a^2 h}{b \cos\beta}$$

dargestellt.

Ist der Schub Q gegeben; so findet man, wie bereits erwähnt, den entsprechenden Werth von m aus Gleichung (386). Die Stabilität wird sich vermindern, sowie der Werth von m über $\frac{1}{2}a$ hinaus wächst, und die Mauer wird nach innen umgeworfen werden, sobald der Schub der Strebe so stark wird, daß m den Werth a überschreitet.

§. 298. Die Stabilität einer Mauer, welche von mehr, als Einer Strebe, in derselben Ebene unterstützt wird.

Die beiden Streben **FE** und fe, welche die Mauer **ABCD** unterstützen und in Einer Ebene liegen, seien beide



zur Aufrechterhaltung der Mauer nothwendig, sodaß sich die Letztere, wenn die Strebe **FE** entfernt würde, um den Punkt e, und wenn die Strebe fe entfernt würde, um irgend einen zwischen **E** und **C** liegenden Punkt drehen würde.

Wenn der Schub der Strebe **FE** nur gerade gleich dem ist, welcher erforderlich ist, um das Bestreben der Mauer, sich um e zu drehen, aufzuheben; so leuchtet ein, daß die Mittellinie des Druckes durch diesen Punkt gehen wird. Überschreitet jedoch der Schub der Strebe den so eben bezeichneten Werth, welcher für das Gleichgewicht gerade nothwendig ist; so wird die Mittellinie des Druckes die Linie eg in irgend einem Punkte x durchschneiden. Setzt man daher $ex = m$, und bezeichnet den in der Längenrichtung der Strebe **FE** sich erzeugenden Schub mit **Q**, das Gewicht dieser Strebe mit $2w$, die Abstände e**D** und ei mit h und b und den Winkel **FEC** mit β; so ist der Werth von **Q** offenbar durch die Gleichung (386) bestimmt. Hierbei denkt man sich den Widerstand der Strebe fe und den des untern Theiles eg**BC** der Mauer als zwei Kräfte, deren Resultante ebenfalls durch x gehen muß, und welche den Widerstand eines Fundamentes bilden, auf dem der obere Theil **DA**ge der Mauer ruhet, und sieht diesen oberen Theil als ein für sich bestehendes Ganze an, auf welchen die Betrachtungen des §. 297 angewendet werden können.

Bezeichnet man in gleicher Weise mit z den Punkt, wo die Mittellinie des Druckes die Grundfläche **CB** der ganzen Mauer durchschneidet, setzt $Cz = m_1$, $CF = b_1$, $= Cf = b_2$, $< feC = \beta_1$, $CD = h_1$, den in der Längenrichtung der Strebe fe sich äußernden Schub $= Q_1$ und das Gewicht dieser Strebe $= 2w_1$; so müssen sich die in den Punkten e und **E** wirkenden Kräfte, Q_1, w_1, und Q, w, ferner die Kraft **P** und das Gewicht $\mu a h_1$ der ganzen Mauer um den als fest gedachten Punkt z im Gleichgewichte erhalten. Hiernach ergibt sich durch das Prinzip der Gleichheit der Momente, ähnlich wie in §. 297, die Gleichung

$$Q_1(b_2+m_1)\cos\beta_1+Q(b_1+m_1)\cos\beta+\mu a h_1(\tfrac{1}{2}a-m_1)$$
$$=P[h_1\sin\alpha-(k+\tfrac{1}{2}a-m_1)\cos\alpha]+(w+w_1)m_1\ldots(387).$$

Substituirt man hierin für Q den Werth aus Gleichung (386) und löſ't für Q_1 auf; so ergibt sich der Druck Q_1, welcher in der Längenrichtung der Strebe fe angebracht werden muß, damit die Stabilität des oberen Mauertheiles auf dem Querschnitte eg und die der ganzen Mauer auf der Grundfläche CB resp. durch m und m_1 dargestellt werde.

Wenn $m_1=m$; so sind diese beiden Mauertheile über CB und eg gleich stabil.

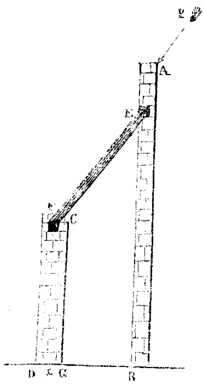
Wenn $m_1=m=0$; so ist der Druck auf eine jede Strebe gerade hinreichend, um die Mauer aufrecht zu erhalten oder um das einfache Bestreben der Mauer, nach außen umzufallen, zu vernichten. Für diesen Fall erhält man, wenn man zuvor für Q den entsprechenden Werth aus Gleichung (386) substituirt,

$$Q_1=\frac{(P\sin\alpha-\frac{1}{2}\mu a^2)(h_1 b-hb_1)+P(b_1-b)(k+\frac{1}{2}a)\cos\alpha}{b b_2\cos\beta_1}.$$

Wenn die Streben stärker angetrieben werden, als es zur Aufrechterhaltung der Mauer eben nothwendig ist, und es wächst demzufolge entweder die Größe m oder m_1 über a hinaus; so wird entweder das obere Mauerstück um den Punkt g, oder die ganze Mauer um den Punkt B nach innen umstürzen.

§. 299. Die Stabilität einer Konstruktion von zwei parallelen Mauern, von denen die Eine durch Streben unterstützt ist, welche auf dem Scheitel der anderen stehen.

AB und CD seien die beiden Mauern und FE Eine der Streben. Behält man für die Mauer AB ganz dieselben Bezeichnungen, wie in §. 297, bei; so ergibt sich der Schub der Strebe FE durch die Gleichung (386); $2w$ bezeichnet alsdann das Gewicht der Strebe FE und b den Abstand des Durchschnittspunktes der Richtung EF mit der Horizontalen BD vom Punkte B. Da dieser Abstand nicht unmittelbar gemessen werden kann; so wird es zweckmäßiger sein, statt der Größe



b die Höhe $BE = c$ einzuführen, indem man $b = c \tang \beta$ setzt, m stellt unter dieser Anwendung der Gleichung (386) den Abstand des Punktes, in welchem die Mittellinie des Druckes in der Mauer **AB** deren Grundfläche durchschneidet, von dem Punkte **B** dar.

Setzt man nun den Abstand Dx des Punktes x, in welchem die Mittellinie des Druckes der Mauer **CD** deren Grundfläche durchschneidet, vom Punkte **D** gleich m_1, die Höhe und Stärke dieser Mauer gleich h_1 und a_1, den Abstand des Stützpunktes **F** der Strebe von der Axe dieser Mauer gleich k_1, den Neigungswinkel der Strebe gegen die Vertikale gleich β, das Gewicht Eines Kubikfußes von der auf die Breite der Strebe reduzirten Mauermasse mit μ_1, (s. §. 297, so daß man sich unter μ_1 auch das Gewicht eines Mauerkörpers vorstellen kann, dessen vertikaler Querschnitt in der Ebene **CD** Einen Quadratfuß beträgt und dessen Länge gleich dem Abstande zweier aufeinander folgender Streben ist); so erhält man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, wenn man die Momente aller auf die Mauer **CD** wirkenden Kräfte in Beziehung zu dem Punkte x nimmt, und beachtet, daß der in **C** sich äußernde Druck die Resultante der Kraft **Q** in der Richtung **EF** und der Kraft w in der vertikalen Richtung **CG** ist (s. §. 297).

$$Q[h_1 \sin\beta + (k_1 + \tfrac{1}{2}a - m_1)\cos\beta] = \mu_1 a_1 h_1 (\tfrac{1}{2}a_1 - m_1) + (k_1 + \tfrac{1}{2}a_1 - m_1) w.$$

Substituirt man hierin für **Q** seinen Werth aus Gleichung (386), nachdem man darin $b = c \tang \beta$ gesetzt hat, so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{P[h \sin\alpha - (k + \tfrac{1}{2}a)\cos\alpha] - \tfrac{1}{2}\mu a^2 h + m\,(P\cos\alpha + \mu a h + w)}{c \sin\beta + m \cos\beta} =$$

$$\frac{\mu_1 a_1 h_1 (\tfrac{1}{2}a_1 - m_1) + (k_1 + \tfrac{1}{2}a_1 - m_1) w}{h_1 \sin\beta + (k_1 + \tfrac{1}{2}a - m_1)\cos\beta} \ldots \; (388).$$

Durch diese Gleichung ist diejenige Beziehung zwischen den Dimensionen der beiden Mauern und dem Drucke **P** gegeben, welche stattfinden muß, damit eine jede Mauer eine bestimmte Stabilität besitze. Wenn $m = o$ ist; so wird der Druck auf die Strebe gerade gleich dem sein, welcher erforderlich ist um das Umstürzen der Mauer **AB** zu verhüten; der durch die vorstehende Gleichung bestimmte Werth von m_1 ergibt alsdann die Stabilität der äußeren Mauer unter dieser Voraussetzung.

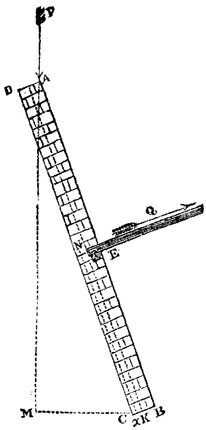
Wenn $m = o$ und $m_1 = o$; so werden beide Mauern im Begriffe sein, umzufallen, und die obige Gleichung drückt die Beziehung aus, welche zwischen den Dimensionen der Mauern und dem Drucke **P** bestehen muß, damit dieser Zustand der Instabilität der Konstruktion stattfinden könne.

Die Bedingungen der Stabilität für den Fall, daß die Mauer **AB** von zwei Streben unterstützt werde, welche auf dem Scheitel der Mauer **CD** ruhen, können mit Hülfe des §s 298 auf eine ähnliche Art entwickelt werden.

Die allgemeinen Bedingungen der Stabilität der in diesem Paragraphe betrachteten Konstruktionen schließen offenbar die eines gothischen Gebäudes mit einem Mittelschiffe ein, dessen Mauern unter dem Drucke ihres Daches von den Dachsparren der Seitenflügel unterstützt werden. Der Einfluß der Strebepfeiler, welche die Außenmauern der Seitenflügel verstärken, auf die Bedingungen der Stabilität der Konstruktion bildet den Gegenstand Eines der folgenden Paragraphen.

§. 300. Die Stabilität einer Mauer, welche die Fußböden verschiedener Stockwerke eines Hauses zu tragen hat.

Die Balken der Fußböden eines Hauses ruhen mit ihren Enden auf sogenannten Mauerlatten, welche in die Mauern gestreckt und von dem Mauerwerke ganz oder theilweise umschlossen sind. Sie bewirken solchergestalt eine Verbindung der gegenüberliegenden Umfangswände des Hauses untereinander und verhindern das Ausweichen derselben unter der Wirkung seitwärts gerichteter Kräfte. Zuweilen ist die Stabilität der schwachen Umfangswände der neueren Gebäude von der Unterstützung, welche sie durch jene Balken erhalten, in einem gewissen Grade abhängig gemacht (wenn auch höchst unzweckmäßig, da ein solches Ge-



bäude unsicher wird, sobald die Enden dieser Balken anfangen zu verfaulen).

Bezeichnet man unter diesen Umständen mit w das Gewicht desjenigen Theiles des Fußbodens, welches auf dem Theile **ABCD** der Mauer ruhet, (sodaß diese Größe das halbe Gewicht des Theiles des Fußbodens darstellt, welcher zwischen zwei aufeinander folgenden Balken und zwischen den beiden Mauern liegt, von denen diese Balken zunächst unterstützt werden), ferner mit μ das Gewicht Eines Kubikfußes der auf die Stärke des Balkens reduzirten Mauermasse (oder auch das Gewicht eines Mauerkörpers, dessen Querschnitt in der vertikalen Ebene **AC** Einen Quadratfuß beträgt und dessen Länge gleich dem Abstande zweier aufeinander folgender Balken ist, s. §. 297), ferner mit c den Abstand **BE**, mit x den Punkt, in welchem die Mittellinie des Druckes die Grundfläche der Mauer durchschneidet, und behält im Übrigen die früheren Bezeichnungen bei; so liefert das Prinzip der Gleichheit der Momente die Gleichung

$$\overline{x\mathbf{N}}\,.\,\mathbf{Q}+\overline{x\mathbf{K}}\,.\,\mu\,a\,h+\overline{x\mathbf{B}}\,.\,w=\overline{x\mathbf{M}}\,.\,\mathbf{P},$$

das ist

$$c\mathbf{Q}+(\tfrac{1}{2}a-m)\mu a h+(a-m)w=[h\sin\alpha-(k+\tfrac{1}{2}a-m)\cos\alpha]\mathbf{P},$$

oder

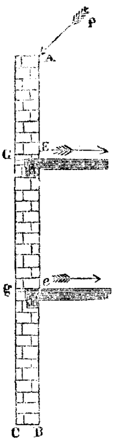
$$\mathbf{Q}=\frac{\mathbf{P}[h\sin\alpha-(k+\frac{1}{2}a)\cos\alpha]-\frac{1}{2}\mu a^2 h-wa+m(\mathbf{P}\cos\alpha+\mu a h+w)}{c} \quad \ldots\ (389).$$

Diese Gleichung zeigt, daß Q desto kleiner wird, je kleiner m ist. Wenn also der Zug der Balken gerade nur so groß ist, daß dadurch der Umsturz der Mauer verhindert wird; so hat man $m=o$. Dieser Zug ist durch die Formel

$$\mathbf{Q}=\frac{\mathbf{P}[h\sin\alpha-(k+\frac{1}{2}a)\cos\alpha]-\frac{1}{2}\mu a^2 h-wa}{c} \quad \ldots\ (390)$$

gegeben.

Wenn man $\beta = \frac{\pi}{2}$ annimmt, und $(a-m)w$ statt mw setzt; so geht der in §. 297 behandelte Fall offenbar in den über, welcher den Gegenstand des vorliegenden Paragraphes bildet, und die Gleichung (389) kann unmittelbar aus der Gleichung (386) abgeleitet werden, nachdem man darin noch $b = c \operatorname{tang} \beta$ gesetzt hat.



Wenn die Mauer den Druck von zwei Fußböden zu ertragen hat, und man bezeichnet den Abstand Ae von ihrem Scheitel bis zu dem unteren Fußboden mit h, die ganze Höhe AB mit h_1, die Abstände von der Außenseite der Mauer, in welchen die Mittellinie des Druckes die Querschnitte GE und ge durchschneidet, resp. mit m und m_1, und substituirt $(w+w_1)(a-m_1)$ für $(w+w_1)m_1$; so kann in gleicher Weise der Werth des Zuges Q_1 in der Richtung der unteren Balken aus Gleichung (387) abgeleitet werden, nachdem man darin $b_2 = \overline{Ce} . \operatorname{tang}\beta_1 = (h_1 - h) \operatorname{tang}\beta_1$ und

$$b_1 = \overline{CE} . \operatorname{tang}\beta = (Ce + eE) \operatorname{tang}\beta = (h_1 - h + c) \operatorname{tang}\beta$$

gesetzt hat. Der Werth von Q ist alsdann durch Gleichung (389) bestimmt.

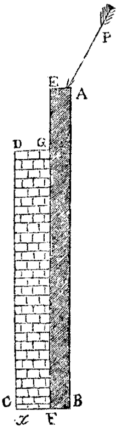
Wenn der Zug der Balken gerade hinreichend ist, um den Umsturz um g und C zu verhindern; so erhält man, wenn man $m = m_1 = 0$ setzt und für Q den Werth aus Gleichung (390) substituirt,

$$Q_1 = \frac{(h-a)(P\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu a^2) + P(k + \frac{1}{2}a)\cos\alpha + wa}{c} - \frac{w_1 a}{h_1 - h} \ldots (391)$$

c bezeichnet hierin den Abstand Ee zwischen beiden Fußböden. Wenn die Balken nicht auf die Mauerlatten gekämmt wären, sondern einfach auf denselben ruheten; so müßte die Belastung der Balken so groß sein, daß der dadurch entstehende Druck zwischen den Oberflächen der Balken und der Mauerlatten eine Reibung erzeugte, deren Betrag wenigstens resp. gleich Q und Q_1 wäre.

§. 301. Die Stabilität einer Mauer, welche von Strebepfeilern unterstützt ist.

Man denke sich die Strebepfeiler in der §. 290 angegebenen Weise über die ganze Länge der Mauer ausgebreitet, und



stelle in der seitstehenden Figur mit ABCD den vertikalen Querschnitt der so zusammengesetzten Mauer dar. Das Gewicht eines jeden Kubikfußes der Masse ABFE sei μ_1, das eines jeden Kubikfußes der Masse GFCD sei μ_2 und der Betrag des schrägen Druckes, welcher sich gegen den Scheitel der Mauer auf die Länge Eines Fußes äußert, sei P. (Man kann sich übrigens auch die zwischen zwei Strebepfeilern liegende Masse der Mauer und den darauf angebrachten Druck auf die Breite Eines Strebenpfeilers zusammengedrängt denken, wie Dies in §. 297. geschehen ist; alsdann bezeichnet offenbar μ_1 das Gewicht eines Mauerkörpers, dessen Querschnitt in der vertikalen Ebene ABFE Einen Quadratfuß beträgt und dessen Länge gleich dem Abstande zweier aufeinander folgender Pfeiler ist, und μ_2 bezeichnet das Gewicht eines Mauerkörpers, dessen Querschnitt in der Ebene EFCD ebenfalls Einen Quadratfuß beträgt und dessen Länge gleich der Breite Eines Strebepfeilers ist, während P den Gesammtdruck darstellt, welcher sich auf die Länge der Mauer zwischen zwei Strebepfeilern äußert). Endlich setze man $BF = a_1$, $FC = a_2$, $BA = h_1$, $CD = h_2$, den Abstand des Punktes, in welchem die Richtung der Kraft P die Linie AE durchschneidet, von den verlängerten Vertikalen $CD = l$, $Cx = m_2$, wenn x den Durchschnittspunkt der Mittellinie des Druckes mit CB bezeichnet, und den Neigungswinkel der Richtung von P gegen die Vertikale $= \alpha$.

Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente ist nun das Moment der Kraft P in Beziehung zu dem Punkte x gleich der Summe der Momente der Gewichte von AF und GC in Beziehung zu demselben Punkte. Man erhält also, da (§. 297.) das Moment von P gleich $P\,[h_1 \sin\alpha - (l - m_2)\cos\alpha]$, ferner das Moment des Gewichtes von AF gleich $(a_2 - m_2 + \tfrac{1}{2} a_1)\, h_1 a_1 \mu_1$ und das Moment des Gewichtes von GC gleich $(\tfrac{1}{2} a_2 - m_2)\, h_2 a_2 \mu_2$ ist,

$$P[h_1 \sin\alpha - (l - m_2)\cos\alpha] = (a_2 - m_2 + \tfrac{1}{2}a_1)h_1 a_1 \mu_1 + (\tfrac{1}{2}a_2 - m_2)h_2 a_2 \mu_2 \quad \ldots . \ (392).$$

Wenn der Strebepfeiler und die Mauer aus demselben Materiale bestehen, und man bezeichnet die Breite eines jeden Pfeilers mit b und die Entfernung zwischen den Mitten zweier aufeinander folgender Pfeiler mit c; so hat man offenbar $\mu_2 : \mu_1 = b : c$ oder $c\mu_2 = b\mu_1$ oder $\mu_2 = \frac{b}{c}\mu_1$. Setzt man die Zahl $\frac{c}{b} = n$ oder $\frac{b}{c} = \frac{1}{n}$, eliminirt zwischen der Gleichung $\mu_2 = \frac{1}{n}\mu_1$ und der Gleichung (392) die Größe μ_2 und schreibt alsdann μ statt μ_1; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$P[h_1 \sin\alpha - l\cos\alpha] =$$
$$\tfrac{1}{2}\mu\left(a_1^2 h_1 + 2a_1 a_2 h_1 + \frac{1}{n}a_2^2 h_2\right) - m_2\left[P\cos\alpha + \mu\left(a_1 h_1 + \frac{1}{n}a_2 h_2\right)\right] \quad \ldots . \ (393).$$

Durch diese Gleichung ist eine Beziehung zwischen den Dimensionen einer von Strebepfeilern unterstützten Mauer gegeben, welche unter der Wirkung des Druckes P eine bestimmte Stabilität m_2 besitzt. Löst man dieselbe für a_2 auf; so erhält man die Stärke des Strebepfeilers, welcher im Stande ist, der Mauer eine verlangte Stabilität zu ertheilen.

Wenn a_2 diejenige Stärke bezeichnet, welche der Pfeiler haben muß, damit er gerade noch im Stande ist, die Mauer unter dem Drucke P aufrecht zu erhalten; so ergibt sich aus der obigen Gleichung, wenn man $m_2 = o$ setzt und dann für a_2 auflost,

$$a_2 = -na_1\frac{h_1}{h_2} +$$
$$\sqrt{\frac{2Pn}{\mu h_2}(h_1 \sin\alpha - l\cos\alpha) + \frac{nh_1}{h_2}\left(\frac{nh_1}{h_2} - 1\right)a_1^2} \quad \ldots . \ (394).$$

Wenn m_1 den Stabilitätsmodel für das Mauerstück AG bezeichnet; so ergibt sich leicht die Gleichung

$$P[(h_1 - h_2)\sin\alpha - (l - a_2 - m_1)\cos a] = (\tfrac{1}{2}a_1 - m_1)(h_1 - h_2)a_1\mu$$

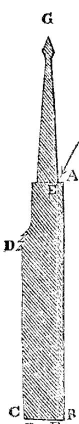
oder, wenn man gehörig reduzirt,

$$P[(h_1-h_2)\sin\alpha-(l-a_2)\cos\alpha]=$$
$$\tfrac{1}{2}(h_1-h_2)\,a_1^2\mu-m_1\,[P\cos\alpha+(h_1-h_2)\,a_1\,\mu] \quad \ldots\ldots \quad (394^a).$$

Ist nun $m_2=m_1$; so hat der Theil AG der Mauer und die ganze Konstruktion AC eine gleiche Stabilität. Durch eine solche Anordnung wird eine gegebene Stabilität mit der größten Materialersparung oder die größte Festigkeit mit einer gegebenen Menge Material erreicht (s. weiter unten §. 390). Nimmt man an, diese Voraussetzung finde wirklich statt, und eliminirt demzufolge zwischen der vorstehenden und der Gleichung (393) die Größe m; so erhält man eine Beziehung zwischen den Dimensionen des Strebepfeilers und der Mauer, welche der Bedingung der größten Materialersparung entspricht. Diese Beziehung ist

$$\frac{\left(a_1^2h_1+2a_1a_2h_1+\frac{1}{n}a_2^2h_2\right)-P(h_1\sin\alpha-l\cos\alpha)}{P\cos\alpha+\mu\left(a_1h_1+\frac{1}{n}a_2h_2\right)}=$$
$$\frac{\frac{1}{2}\mu(h_1-h_2)a_1^2-P[(h_1-h_2)\sin\alpha-(l-a_2)\cos\alpha]}{P\cos\alpha+\mu a_1(h_1-h_2)}.$$

§. 302. Die Stabilität einer mit Zinnen versehenen und von Strebepfeilern unterstützten Mauer.



Bezeichnet man mit W das Gewicht der Zinne, mit e den Abstand einer durch ihren Schwerpunkt gehenden Vertikalen von der Kante C des Strebepfeilers, mit x den Durchschnittspunkt der Mittellinie des Druckes mit der Grundfläche CB, und behält die übrigen Bezeichnungen des vorstehenden Paragraphes bei; so wird die Gleichung (392)

$$P\,[h_1\sin\alpha-(l-m_2)\cos\alpha]=(a_2-m_2+\tfrac{1}{2}a_1)\,h_1a_1\mu_1$$
$$+(\tfrac{1}{2}a_2-m_2)\,h_2a_2\mu_2+(e-m_2)\,W.$$

Substituirt man hierin für μ_2 seinen Werth $\frac{b}{c}$ μ_1 oder $\frac{1}{n}$ μ_1, schreibt alsdann μ statt μ_1 und reduzirt gehörig; so kommt

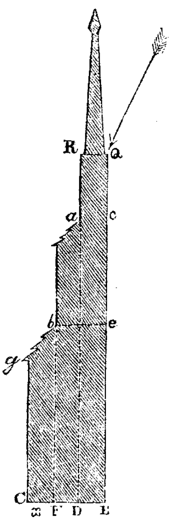
$$P(h_1 \sin\alpha - l\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}\mu(a_1^2 h_1 + 2a_1 a_2 h_1 + \frac{1}{n} a_2^2 h_2)$$

$$+ We - m_2\left[P\cos\alpha + W + \mu(a_1 h_1 + \frac{1}{n} a_2 h_2)\right] \ldots . (395).$$

Wenn a_2 die Stärke des Strebepfeilers bezeichnet, mit welcher er gerade noch im Stande ist, die Mauer unter dem Drucke P aufrecht zu erhalten; so findet man, wenn man $m_2 = 0$ setzt und für a_2 auflös't,

$$a_2 = -n\, a_1 \frac{h_1}{h_2} + \sqrt{\frac{2n}{\mu h_2}\left[P(h_1 \sin\alpha - l\cos\alpha) - We\right] + \frac{n h_1}{h_2}\left(\frac{n h_1}{h_2} - 1\right) a_1^2} \ldots (396).$$

Der gothische Strebepfeiler.



§. 303. Bei gothischen Gebäuden ändert sich die Stärke des Strebepfeilers zuweilen in zwei oder drei verschiedenen Höhen über der Grundfläche. Ein solcher Pfeiler ist in der nebenstehenden Figur dargestellt.

Die Bedingungen, unter welchen der Theil, dessen Grundfläche be ist, irgend eine gegebene Stabilität erhalte, können offenbar durch Gleichung (395) bestimmt werden.

Um die Bedingungen für die Stabilität der ganzen Konstruktion zu bestimmen, so seien die Höhen der Punkte Q, a, b über CE resp. gleich h_1, h_2, h_3, ferner sei $ED = a_1$, $DF = a_2$, $FC = a_3$, der Abstand, in welchem die Richtung der Kraft P die Linie QR durchschneidet, von der Vertikalen CG gleich l, der Abstand der Vertikalen durch den Schwerpunkt der Zinne von der Kante C gleich e und $Cx = m_3$. Behält man im Übrigen die früheren Bezeichnungen bei; so ergibt sich nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, da die Abstände der Vertikalen durch die Schwerpunkte der Theile, deren Grundflächen **ED**, **DF**, **FC** sind, vom Punkte x resp. $(a_3 + a_2 + \frac{1}{2}a_1 - m_3)$, $(a_3 + \frac{1}{2}a_2 - m_3)$, $(\frac{1}{2}a_3 - m_3)$ sind,

$$\mathrm{P}\,[h_1 \sin\alpha - (l - m_3)\cos\alpha] =$$

$$(a_3 + a_2 + \tfrac{1}{2}a_1 - m_3)\,h_1 a_1 \mu + (a_3 + \tfrac{1}{2}a_2 - m_3)\,h_2 a_2 \frac{\mu}{n}$$

$$+ (\tfrac{1}{2}a_3 - m_3)\,h_3 a_3 \frac{\mu}{n} + \mathrm{W}\,(e - m_3) \quad \ldots . \; (397).$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen den Dimensionen des Strebepfeilers und seiner Stabilität dar, vermittelst welcher irgend Eine der darin enthaltenen Größen dergestalt bestimmt werden kann, daß dadurch m_3 oder die Stabilität der Konstruktion einen beliebigen gegebenen Werth erhält.

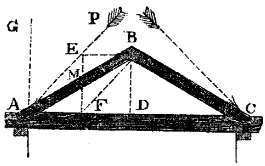
Aus §. 390 wird man ersehen, daß wenn bei der Konstruktion des Strebepfeilers auf die größte Materialersparung, welche sich mit einer gegebenen Stabilität verträgt, Rücksicht genommen werden soll, die Stabilität der Theile Qa und Qb auf ihren entsprechenden Grundflächen ca und eb denselben Werth haben muß, wie die Stabilität der ganzen Konstruktion QC auf ihrer Grundfläche **EC**. Demnach muß der Werth von m_3 aus der vorstehenden Gleichung dem Werthe von m_2 aus der Gleichung (395) und dem Werthe von m_1 aus Gleichung (394^a), nachdem man auf der rechten Seite der Letzteren wegen der Zinne noch das Glied $(e - a_2 - m_1)$ W addirt hat, gleich sein. Eliminirt man daher zwischen diesen drei Gleichungen die Größe m, indem man beachtet, daß die Größen h_1, h_2, l und e in den Gleichungen (395) und (394^a) resp. durch $(h_1 - h_3)$, $(h_2 - h_3)$, $(l - a_3)$ und $(e - a_3)$ in Gleichung (397) dargestellt werden; so erhält man zwischen den Größen $a_1, a_2, a_3, h_1, h_2, h_3$ zwei Beziehungen, denen ein Genüge geleistet werden muß, wenn der Konstruktion in allen ihren Theilen eine gewisse gleiche Stabilität mit der größten Materialersparung oder wenn derselben mit einer gegebenen Quantität Material die größte Stabilität verliehen werden soll.

Verlangte man nur, daß die beiden Theile Qb und QC eine gleiche Stabilität besäßen; so hätte man nur die beiden Gleichungen (395) und (397) zu berücksichtigen, $m_3 = m_2$ zu setzen und durch Elimination dieser Größen die einzige Beziehung, welche zwischen den Größen a_1, a_2, ... stattfinden muß, zu entwickeln.

Die Stabilität der Mauern, welche Dächer tragen.

§. 304. **Der Schub der Sparren, wenn der Balken nicht an dieselben gehängt ist.**

Es sei μ_1 das Gewicht eines jeden Quadratfußes der Bedachung mit allem Zubehör, 2L die Spannweite AC, ι der Nei-



gungswinkel BAC der Sparren, q der Abstand zwischen zwei aufeinder folgenden Sparrengebinden und α der Neigungswinkel PAG des mittleren Druckes P am Fuße der Sparren gegen die Vertikale; alsdann ist $\frac{L}{\cos\iota}$ die Länge eines jeden Sparrens und $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$ das von einem jeden Sparren zu tragende Gewicht der Bedachung.

Ist nun R der zwischen den Sparren bei B sich äußernde Druck, dessen Richtung BE wegen der symmetrischen Lage aller Theile des Systemes ABC nothwendig horizontal sein muß; so leuchtet ein, daß sich die drei Kräfte P, $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$ und R an einem jeden Sparren, wie AB, im Gleichgewichte erhalten müssen. Da aber die Richtung des Gewichtes $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$ in der durch die Mitte von AB gehenden Vertikalen EF liegt und die Richtung BE der Kraft R horizontal ist; so folgt, daß die Richtung PA der dritten Kraft P durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt E der beiden Linien EF und BE gehen muß. Zieht man daher die Linie BE, welche der Linie EA parallel sein wird, weil BE gleich und parallel AF ist; so können die drei Kräfte P, $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$ und R resp. durch die Linien EA, EB und EF dargestellt werden*).

Hiernach hat man

$$\text{tang AEF} = \frac{\text{AF}}{\text{EF}},$$

d. i., da $< \text{AEF} = \text{PAG} = \alpha$, $\text{AF} = \frac{1}{4}\text{L}$ und $\text{EF} = \text{BD} = \frac{1}{2}\text{L tang}\,\iota$ ist,

$$\text{tang}\,\alpha = \tfrac{1}{2}\cot\iota \quad \ldots \quad (398).$$

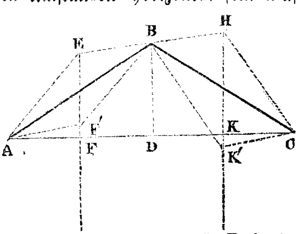
Ferner hat man

$$\frac{\text{P}}{\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}} = \frac{\text{EA}}{\text{EF}} = \frac{\sin \text{EFA}}{\sin \text{EAF}},$$

d. i., da $< \text{EFA} = \frac{\pi}{2}$ und $\text{EAF} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist,

$$\text{P} = \frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

*) Daß die Richtung des Druckes R zwischen den Sparren bei B unter allen Umständen horizontal sein müsse, welches auch die Art der Verbindung der Sparren in diesem Punkte sei, geht aus der folgenden einfachen Betrachtung hervor.



Angenommen, die Richtung EBH der Kraft R sei nicht horizontal und schneide die vertikalen Richtungen EF und HK der Gewichte $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$, welche beide durch die Mitten von AB und CB oder auch durch die Mitten von AD und CD gehen, in den Punkten E und H; alsdann müßten EA und HC die Richtungen der Kraft P in den Punkten A und C sein. Zieht man hierauf AF' und CK' parallel zu EH und vollendet die Parallelogramme AEBF' und CHBK'; so müssen in beiden resp. die Linien EA, EF', EB und HC, HK', HB die Kräfte P, $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$, R darstellen. Die Kräfte $\frac{\mu_1 Lq}{\cos\iota}$ und R müssen für beide Sparren nothwendig einander gleich sein; es muß daher nothwendig $\frac{\text{EF}'}{\text{EB}} = \frac{\text{HK}'}{\text{HB}}$ sein. Man findet aber leicht, daß vermöge der Konstruktion der Durchschnittspunkte E und H EB immer = HB ist; demnach müßte sein EF' = HK', was offenbar nur dann möglich ist, wenn die Linie EH eine horizontale Richtung hat.

oder da $\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\iota}$ ist,

$$P = \frac{\mu_1 L q}{\cos\iota}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\cot^2\iota} \quad \ldots\ldots (399).$$

Wenn man den Neigungswinkel ι des Daches bei unveränderter Tiefe des Gebäudes variiren läßt; so erreicht der Werth von P ein Minimum, wenn $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\iota}}{\cos\iota} = \sqrt{\frac{1}{\cos\iota} + \frac{1}{4\sin^2\iota}}$, oder wenn $\frac{1}{\cos^2\iota} + \frac{1}{4\sin^2\iota}$ ein solches wird, d. h. wenn $\operatorname{tang}\iota = \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder

$$\iota = 35^0\, 16' \quad \ldots\ldots (400)$$

wird.

Bei dieser Neigung einer Dachfläche, deren Sparren die in der vorstehenden Figur dargestellte einfache Form haben, erzeugt sich demnach an dem Fuße der Sparen der geringste Druck.

Wenn φ den Reibungswinkel für die untere Fläche der Sparren und die obere Fläche des Balkens, auf welchem sie stehen, bezeichnet; so würden jene auf diesen nicht ausgleiten, selbst wenn sie nicht in dieselben gezapft wären, solange der Winkel α den Reibungswinkel φ nicht überschritte (§. 141), oder solange $\frac{1}{2}\cot\iota$ nicht größer, als $\operatorname{tang}\varphi$, oder solange

$$\left.\begin{array}{rl} & \iota > \operatorname{arc.cot}(2\operatorname{tang}\varphi) \\ \text{oder auch} & > \operatorname{arc.tang}\left(\frac{1}{2\operatorname{tang}\varphi}\right)\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (401)$$

wäre.

Um den Schub Q der Sparren in der Richtung ihrer Länge zu bestimmen, hat man die Kraft P in zwei andere zu zerlegen, von denen die Eine parallel zu BA und die andere vertikal oder parallel zu EF ist. Man sieht, daß wenn die Kraft P durch die Linie EA dargestellt ist, der Schub Q durch die Linie MA dargestellt sein wird. Da nun nach demselben Maaßstabe, nach welchem EA die Kraft P mißt, EF ein Maaß für das Gewicht $\frac{\mu_1 L q}{\cos\iota}$ und demnach $EM = \frac{1}{2}EF$ ein Maaß für das halbe Gewicht

$\frac{\mu_1 L q}{2\cos\iota}$ des Sparrens mit der dazu gehörigen Dachfläche ist; so folgt, daß die Linien MA und EM oder auch die Linien MA und MF den Kräften Q und $\frac{\mu_1 L q}{2\cos\iota}$ proportional sind. Demzufolge hat man, weil in dem Dreiecke AMF

$$MA . \sin MAF = MF$$

ist,

$$Q . \sin\iota = \frac{\mu_1 L q}{2\cos\iota}$$

oder

$$Q = \frac{\mu_1 L q}{2\sin\iota . \cos\iota} = \frac{\mu_1 L q}{\sin 2\iota} .$$

Zerlegt man die Kraft P in ihre horizontale und vertikale Komponente; so ergibt die erstere, welche offenbar durch die Linie EA dargestellt wird, den horizontalen Schub, welcher sich am Fuße der Sparren äußert, und die letztere, welche durch die Linie EF dargestellt wird, ergibt den vertikalen Druck, welchen der Balken bei A auszuhalten hat. Bezeichnet man daher den horizontalen Schub mit Q_1 und den vertikalen Druck mit W; so hat man offenbar

$$W = \frac{\mu_1 L q}{\cos\iota}$$

und

$$\frac{AF}{FM} = \tang AMF = \cot MAF,$$

d. i.

$$\frac{Q_1}{\frac{1}{2} W} = \frac{Q_1}{\frac{\mu_1 L q}{2\cos\iota}} = \cot . \iota ,$$

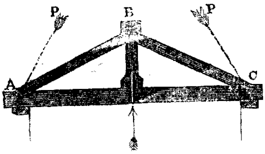
folglich

$$Q_1 = \frac{\mu_1 L q}{2\sin\iota} .$$

Wenn nun auch der Gesammtdruck P oder die Resultante aller am Fuße der Sparren wirkenden Kräfte für den Werth von $\iota = 35^0 16'$ (Gleichung 400) ein Minimum wird; so findet man doch leicht, daß der Schub Q in der Richtung der Sparren sein Minimum dann erreicht, wenn $\tan g \iota = 1$ oder $\iota = 45^0$ ist, und daß der horizontale Schub Q_1 sein Minimum erreicht, wenn $\sin \iota = 1$ oder $1 = 90^0$ ist.

§. 305. **Der Schub der Sparren, an welchen der Balken vermittelst einer Hängesäule in der Mitte aufgehängt ist.**

In dem folgenden Abschnitte dieses Werkes (Gleichung 563) wird man sehen, daß in diesem Falle der Druck auf die Hänge-



säule gleich $\frac{5}{8}$ des Gewichtes des Balkens ist. Bezeichnet man daher das Gewicht eines jeden laufenden Fußes dieses Balkens mit μ_2; so wird $\frac{5}{8}\mu_2 2L = \frac{5}{4}\mu_2 L$ das in vertikaler Richtung im Punkte **D** oder **B** wirkende Gewicht sein.

Behält man nun die Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphes bei und stellt zuvörderst der Kürze wegen die Hälfte des in **B** wirkenden Gewichtes oder die Kraft $\frac{5}{8}\mu_2 L$ mit W_1 dar, ferner das durch die Mitte des Sparrens **AB** wirkende Gewicht $\frac{\mu_1 L q}{\cos \iota}$ mit **W**, den im Punkte **B** sich äußernden horizontalen Widerstand zwischen beiden Sparren mit **R** und den mittleren Druck im Punkte **A** mit **P**; so leuchtet ein, daß sich an dem Sparren **AB** die vier Kräfte W, W_1, P und R (wobei das Gewicht der Hängesäule entweder vernachlässigt oder zur Hälfte mit unter dem Gewichte W_1 begriffen ist) im Gleichgewichte erhalten müssen. Nimmt man daher die Momente dieser Kräfte in Beziehung zum Punkte **A**, durch welchen die Kraft **P** wirkt; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente (§. 7), da $AD = L$ und der Abstand der Richtung der Kraft **R** vom Punkte **A** oder $DB = L \tan g \iota$ ist,

$$\tfrac{1}{2}L.W + L.W_1 = L \tan g \iota . R \; .$$

Denkt man sich nun die Kräfte W, W_1, P und R parallel mit sich selbst an irgend einen einzigen Punkte getragen; so müssen sich dieselben nach §. 8. auch in dieser Lage im Gleichgewichte erhalten, und man hat demnach, wenn man die Kraft **P** in ihre horizontale und vertikale Komponente $P\sin\alpha$ und $P\cos\alpha$ zerlegt, nach §. 10. die beiden Gleichungen

$$P\sin\alpha = R,$$
$$P\cos\alpha = W + W_1.$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander und substituirt darin für R den Werth

$$R = \frac{\frac{1}{2}W + W_1}{\tang\iota}$$

aus der vorhergehenden Gleichung; so kommt

$$\tang\alpha = \frac{\frac{1}{2}W + W_1}{(W + W_1)\tang\iota};$$

quadrirt man dagegen eine jede dieser beiden Gleichungen, addirt dieselben alsdann, substituirt den Werth für R und zieht die Quadratwurzel aus; so ergibt sich

$$P = \sqrt{(W + W_1)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}W + W_1}{\tang\iota}\right)^2}.$$

Die vorstehenden beiden Gleichungen werden, wenn man da-darin $W = \frac{\mu_1 L q}{\cos\iota}$ und $W_1 = \frac{5}{8}\mu_2 L$ setzt, und gehörig reduzirt,

$$\tang\alpha = \left(\frac{\mu_1 q\sec\iota + \frac{5}{4}\mu_2}{2\mu_1 q\sec\iota + \frac{5}{8}\mu_2}\right)\cot\iota \quad \ldots\ldots \quad (402)$$

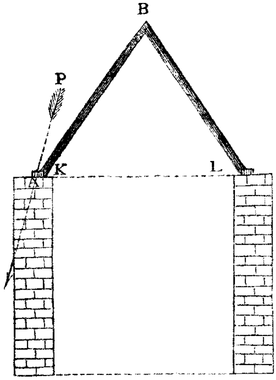
$$P = \tfrac{1}{2}L\sqrt{(2\mu_1 q\sec\iota + \tfrac{5}{4}\mu_2)^2 + (\mu_1 q\sec\iota + \tfrac{5}{4}\mu_2)^2\cot^2\iota} \quad \ldots\ldots \quad (403).$$

Wollte man in diesen Formeln das Gewicht der Hängesäule BD mit berücksichtigen; so hätte man, wenn das Gewicht Eines laufenden Fußes derselben gleich μ_3 wäre, $W_1 + \frac{1}{2}\mu_3 L\tang\iota$ statt W_1 oder $\frac{5}{8}\mu_2 L + \frac{1}{2}\mu_3 L\tang\iota$ statt $\frac{5}{8}\mu_2 L$ oder auch $(\frac{5}{4}\mu_2 + \mu_3\tang\iota)L$ statt $\frac{5}{4}\mu_2 L$ oder $\frac{5}{4}\mu_2 + \mu_3\tang\iota$ für $\frac{5}{4}\mu_2$ zu setzen.

§. 306. **Die Stabilität einer Mauer, welche den Schub der Sparren eines Daches ohne durchgehende Balken auszuhalten hat.**

In der Gleichung (382), durch welche die Mittellinie des

Druckes in einer Mauer dargestellt wird, bezeichnen die Glieder



P $\sin\alpha$ und **P** $\cos\alpha$ den horizontalen und vertikalen Druck auf einen jeden laufenden Fuß der Länge der Mauer. Der erstere ist in dem vorliegenden Falle eines Daches ohne durchgehende Balken offenbar durch $\frac{\frac{1}{2}\mu_1 \mathrm{L}}{\sin\iota}$ und der letztere durch $\frac{\mu_1 \mathrm{L}}{\cos\iota}$ ausgedrückt (s. §. 304). Substituirt man daher diese Werthe in Gleichung (382); so ergibt sich für die Gleichung der Mittellinie des Druckes in einer Mauer, welche den Sparrenschub eines Daches ohne durchgehende Balken auszuhalten hat,

$$y = \mathrm{L}\,\frac{\frac{1}{2}x\cot\iota - k}{\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)ax\cos\iota + \mathrm{L}} \quad \ldots\ldots (404).$$

In diesem Ausdrucke stellt a die Stärke der Mauer, k den Abstand des Fußes der Sparren von der Mitte der Mauer, **L** die Spannweite des Daches, μ das Gewicht Eines Kubikfußes der Mauer und μ_1 das Gewicht eines jeden Quadratfußes der Bedachung dar. Die Stärke a der Mauer kann unter der Bedingung, daß dieselbe bei einer gegebenen Höhe h den Schub der Sparren mit einem gewissen Grade von Stabilität ertrage, genau so, wie in §. 295 bestimmt werden, indem man in der vorstehenden Gleichung h für x und $\frac{1}{2}a - m$ für y substituirt, und die daraus hervorgehende Gleichung für a auflös't.

Verlangte man dagegen die Neigung ι der Sparren unter der Bedingung zu bestimmen, daß dieselben bei einer gegebenen Weite **L** von einer Mauer, deren Höhe gleich h und deren Stärke gleich a wäre, mit einem gewissen Grade von Stabilität getragen würden; so brauchte man die eben erwähnte quadratische Gleichung nur für ι, anstatt für a, aufzulösen.

Der Werth von a läßt in Beziehung zu der Veränderlichen ι ein Minimum zu. Dieser Werth von ι, welcher ein solches Minimum von a bestimmt, gehört derjenigen Neigung der Sparren an, für welche die Materialersparung bei einer gegebenen Stabilität der Mauer am größten ist.

§. 307. **Die Stabilität einer Mauer, welche den Schub der Sparren eines Daches ohne durchgehende Balken ausgehalten hat und von Strebepfeilern unterstützt wird.**

Die Bedingungen für die Stabilität einer solchen Mauer, deren Strebepfeiler von gleichförmiger Stärke sind, werden offenbar aus Gleichung (393) erhalten, wenn man darin für $\mathbf{P}\sin\alpha$ und $\mathbf{P}\cos\alpha$ ihre Werthe $\frac{\frac{1}{2}\mu_1 \mathbf{L}}{\sin\iota}$ und $\frac{\mu_1 \mathbf{L}}{\cos\iota}$ substituirt. Hierdurch ergibt sich

$$\mu_1 \mathbf{L}\left(\frac{\frac{1}{2}h_1}{\sin\iota} - \frac{l}{\cos\iota}\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}\mu\left(a_1{}^2 h_1 + 2a_1 a_2 h_1 + \frac{1}{n}a_2{}^2 h_2\right) - m_2\left[\frac{\mu_1 \mathbf{L}}{\cos\iota} + \mu\left(a_1 h_1 + \frac{1}{n}a_2 h_2\right)\right] \quad \ldots\ldots (405).$$

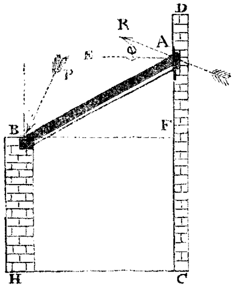
Aus dieser Gleichung wird die Stärke a_2 des Strebepfeilers gefunden werden, welcher im Stande ist, der Mauer eine bestimmte Stabilität m_2 zu geben.

Wenn die Stärke der Strebepfeiler in verschiedenen Höhen verschieden ist, und dieselben außerdem noch mit Zinnen überbauet sind; so können die Bedingungen für die Stabilität auf eine ähnliche Weise bestimmt werden, wenn man die vorstehenden Werthe für $\mathbf{P}\sin\alpha$ und $\mathbf{P}\cos\alpha$ in die Gleichungen (395) und (397) substituirt.

Zur Bestimmung der Bedingungen für die Stabilität eines gothischen Gebäudes, dessen Mittelbau ein Dach ohne durchgehende Balken besitzt und durch die Sparren der beiden Seitenflügel unterstützt wird, kann eine ähnliche Substitution in Gleichung (388) gemacht werden. Wenn die Mauern der Seitenflügel von Strebepfeilern unterstützt würden; so müßte die Gleichung (388) durch eine Beziehung ersetzt werden, welche man durch die in §. 301 und 303 angewendeten Methoden leicht herstellen kann.

§. 308. Die Stabilität der Mauern, welche ein Pultdach tragen.

AB sei Einer der ersten Sparren eines solchen Daches, dessen Eines Ende **A** sich gegen die Fläche der Mauer **DC** stemmt, während das andere Ende **B** auf dem Scheitel der Mauer **BH** ruhet.



Es leuchtet ein, daß wenn die Mauer **BH** im Begriffe ist, umgeworfen zu werden, das Ende **A** des Sparrens augenblicklich auf der vertikalen Fläche der Mauer **DC** gleitet, sodaß in diesem Zustande der Stabilität der Mauer **BH** die Richtung des Widerstandes **R** der Mauer **DC** gegen den Sparren mit dem Perpendikel **AE** auf ihrer Oberfläche den Reibungswinkel φ einschließen wird. Außerdem gehört diese Richtung des Widerstandes **R**, welche dem Gränzzustande des Gleichgewichtes entspricht, auch jedem anderen Zustande an. Denn nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes (s. die Theorie des Gewölbbogens) ist von allen Widerständen, welche im Stande sind, den Sparren im Gleichgewichte zu erhalten, der wirkliche Widerstand der Mauer **BC** der kleinste. Dieser kleinste Widerstand ist aber offenbar derjenige, dessen Richtung der vertikalen Richtung am nächsten kommt, weil der ganze auf den Sparren (vermöge seiner Belastung) angebrachte Druck ein vertikaler ist. Da jedoch die Fläche der Mauer keinen Widerstand erzeugen kann, dessen Richtung sich weiter von der Horizontalen **AE** entfernt, als die Linie **AR**; so folgt, daß **AR**, welche mit **AE** den Reibungswinkel φ einschließt, die Richtung des Widerstandes in einem jeden Zustande der Stabilität der Mauer **DC** darstellt.

Zerlegt man nun **R** in seine vertikale und horizontale Komponente $R \sin\varphi$ und $R \cos\varphi$, bezeichnet mit **L** die Spannweite **BF**, mit ι den Neigungswinkel **ABF**, mit q den Abstand der Sparren von einander, mit μ_1 das Gewicht eines jeden Quadratfußes der Bedachung, mit **P** den mittleren Druck gegen den Scheitel der Mauer **BH** und mit α den Neigungswinkel der Richtung dieses Druckes gegen die Vertikale; so hat man nach §. 10

$$\mathrm{R}\sin\varphi+\mathrm{P}\cos\alpha=\frac{\mu_1\mathrm{L}q}{\cos\iota}$$

und

$$\mathrm{R}\cos\varphi=\mathrm{P}\sin\alpha\ .$$

Die Perpendikel von A auf die Richtung von P und auf die vertikale Richtung des durch die Mitte von AB wirkenden Gewichtes $\frac{\mu_1\mathrm{L}q}{\cos\iota}$ sind resp. $\overline{\mathrm{AB}}\,.\cos(\alpha+\iota)=\frac{\mathrm{L}\cos(\alpha+\iota)}{\cos\iota}$ und $\frac{1}{2}\mathrm{L}$. Man hat also nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente (§. 7) die dritte Beziehung

$$\frac{\mathrm{L}\cos(\alpha+\iota)}{\cos\iota}\mathrm{P}=\tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,.\frac{\mu_1\mathrm{L}q}{\cos\iota}$$

oder

$$\mathrm{P}\cos(\alpha+\iota)=\tfrac{1}{2}\mu_1\mathrm{L}q.$$

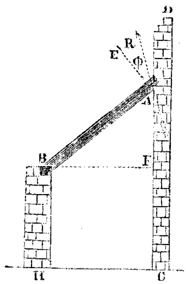
Setzt man den Werth von R aus der zweiten und den Werth von P aus der dritten der drei vorstehenden Gleichungen in die erste; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\left.\begin{array}{l}\cot\alpha=\mathrm{tang}\,\varphi+2\mathrm{tang}\,\iota\\ \text{oder}\\ \mathrm{tang}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tang}\varphi+2\mathrm{tang}\iota}\end{array}\right\}\ \ldots\ (406).$$

Eliminirt man aus den obigen Gleichungen Ein Mal die Größe P und Ein Mal die Größe R, löſ't die sich ergebende Gleichung resp. für R oder P auf und substituirt darin für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die Werthe, welche sich aus Gleichung (406) entwickeln lassen; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\mathrm{R}=\frac{\frac{1}{2}\mu_1\mathrm{L}q}{\sin(\iota+\varphi)}\ \text{und}\ \mathrm{P}=\tfrac{1}{2}\mu_1\mathrm{L}q\frac{\cos\varphi\sqrt{1+(\mathrm{tang}\varphi+2\mathrm{tang}\iota)^2}}{\sin(\iota+\varphi)}\ \ldots\ (407).$$

Wenn der Sparren bei A, anstatt sich gegen die vertikale Fläche der Mauer zu lehnen, in eine Öffnung eingelassen ist, sodaß der Widerstand der Mauer gegen seine untere Fläche,



anstatt gegen seine Stirn wirkt; so wird offenbar die Linie **AR**, welche sich gegen das Perpendikel **AE** auf der unteren Fläche des Sparrens unter dem Reibungswinkel φ neigt, die Richtung des fraglichen Widerstandes darstellen. Da die Neigung dieses Widerstandes gegen den Horizont gleich $\frac{\pi}{2} - \iota + \varphi$ ist; so erhält man die auf den gegenwärtigen Fall bezüglichen Gleichungen, wenn man in den vorhergehenden $\frac{\pi}{2} - \iota + \varphi$ an die Stelle von φ setzt. Dies ergibt

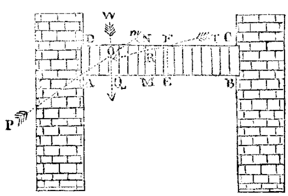
$$\cot\alpha = \cot(\iota - \varphi) + 2\,\mathrm{tang}\,\iota \;\ldots.\; (408.$$

$$R = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 L q}{\cos\varphi} \text{ und } P = \tfrac{1}{2}\mu_1 L q \sqrt{1 + [\cot(\iota - \varphi) + 2\,\mathrm{tang}\,\iota]^2} \;\ldots (409).$$

Substituirt man nun die aus diesen Gleichungen für $P\sin\alpha$ und $P\cos\alpha$ sich ergebenden Werthe in die Gleichungen (382) und (384); so erhält man alle Bedingungen für die Stabilität einer Mauer, welche den Schub eines Pultdaches auszuhalten hat.

Der scheitrechte Sturz.

§. 309. **MN** sei irgend eine vertikale Fuge des scheitrechten Sturzes **ABCD**, dessen Unterstützungspunkte **A** und **B** sind; **PA** sei die Richtung des Widerstandes bei **A**, **WQ** eine Vertikale durch den



Schwerpunkt des Theiles **AMND** oder die Richtung des Gewichtes dieses Theiles, **TR** die Richtung des mittleren Druckes auf die Fuge **MN**. Da sich die eben erwähnten drei Kräfte an dem Stücke **AMND** im Gleichgewichte erhalten müssen; so ist es nothwendig, daß sich ihre Richtungen **PA**, **WQ** und **TR** in einem einzigen Punkte **O** schneiden. Bezeichnet man daher mit

P den Widerstand in der Richtung **PA**, mit

α den Winkel **OAD**, mit
H die Stärke **AD** des Sturzes, mit
2L dessen Weite **AB**, mit
μ_1 das Gewicht Eines Kubikfußes seiner Masse, mit
x die Linie **AM**, mit
y die Linie **MR**
und fällt von **R** auf die Verlängerung von **PA** des Perpendikels **R**m; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\overline{\mathrm{R}m} \cdot \mathrm{P} = \overline{\mathrm{MQ}} \times (\text{Gewicht von DM}).$$

Nun ist aber $\mathrm{R}m = x \cos\alpha - y \sin\alpha$,

$$\mathrm{MQ} = \tfrac{1}{2} x \text{ und Gewicht von } \mathrm{DM} = \mathrm{H} x \mu_1.$$

Da ferner an dem ganzen Sturze **DB** zwei in **A** und **B** wirkende Kräfte gleich **P** dem Gewichte von **DB** oder der vertikalen Kraft $2\mathrm{LH}\mu_1$ das Gleichgewicht halten müssen; so hat man auch, wenn man diese beiden Kräfte **P** in ihre vertikalen Komponenten zerlegt,

$$\mathrm{P} \cos\alpha = \mathrm{LH}\mu_1 \; \ldots . \; (410).$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\mathrm{L}(x - y \operatorname{tang}\alpha) = \tfrac{1}{2} x^2 \; \ldots . \; (411).$$

Diese Gleichung, welche der Mittellinie des Druckes angehört, stellt eine Parabel dar, deren Axe in der durch die Mitte von **AB** gehenden Vertikalen liegt. Setzt man hierin $x = \mathrm{L}$ und bezeichnet den entsprechenden Werth von y mit **Y**; so erhält man die Gleichung $\mathrm{Y} \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{2}\mathrm{L}$ oder $\operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{Y}}$. Hieraus geht hervor, daß α umso kleiner wird, je größer **Y** wird. Aus Gleichung (410) folgt aber auch, daß **P** umso kleiner wird, je kleiner α wird, und man sieht, daß der Werth von **P** in dem Maaße abnimmt, wie der Werth von **Y** zunimmt. **Y** kann jedoch den Werth **H** niemals überschreiten, weil sonst die Mittellinie des Druckes die obere Fläche **DC** des Sturzes durchschneiden und dieser zusammenbrechen würde, was unmöglich ist, solange die beiden Stützpunkte **A** und **B** fest sind oder die Widerlagsmauern die erforderliche Stabilität darbieten. Der geringste Werth von P, welcher sich mit der Stabilität des Sturzes verträgt, ist also der, für welchen Y gleich H wird und die Mittellinie des Druckes die obere Fläche des Sturzes in F berührt.

Da nun dieser geringste Werth von P nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes (s. die Theorie des Gewölbbogens) der wirkliche Werth des Widerstandes in A ist; so hat man

$$\tan g \alpha = \tfrac{1}{2} \frac{L}{H} \dots . (412).$$

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (410) und (412) den Winkel α; so erhält man

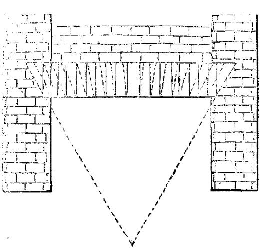
$$P = LH \mu_1 \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} \frac{L^2}{H^2}} \dots . (413).$$

Multiplizirt man Gleichung (410) mit (412); so kommt

$$P \sin \alpha = \tfrac{1}{2} L^2 \mu_1 \dots . (414).$$

Da $P \sin \alpha$ den horizontalen Schub gegen den Unterstützungspunkt A darstellt; so folgt aus der vorstehenden Gleichung, daß der horizontale Schub eines scheitrechten Sturzes gegen seine beiden Widerlagen von seiner Stärke H ganz unabhängig ist, und daß jener Schub, wie das Quadrat der Weite L, variirt. Die Stabilität der Widerlagsmauern eines solchen Sturzes wird demnach durch eine Vergrößerung der Stärke H keineswegs vermindert, sondern im Gegentheil vermehrt, indem sich bei zunehmender Stärke H der vertikale Druck auf die Unterstützungspunkte vergrößert, während der horizontale Schub unverändert bleibt.

§. 310. Der belastete scheitrechte Sturz.



Es leuchtet ein, daß die Wirkung einer gleichförmig über die obere Fläche des Sturzes vertheilten Last in Beziehung auf die Stabilität desselben auch dadurch hervorgebracht werden könnte, daß man die Last entfernte und das spezifische Gewicht der Masse des Sturzes dergestalt vermehrte, daß das Gesammtgewicht der ganzen Konstruktion ungeändert bliebe. Bezeichnet demnach μ_3 das Gewicht eines jeden Kubikfußes der so vermehrten Masse des Sturzes, μ_2 das Gewicht eines jeden Kubikfußes und H_1 die Höhe der Belastung; so hat man

$$\mu_3 H . L = \mu_1 H . L + \mu_2 H_1 L,$$

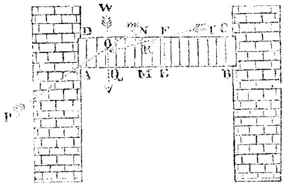
also

$$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 \frac{H_1}{H} \;\ldots.\; (415).$$

Substituirt man nun diesen Werth von μ_3 für μ_1 in die Gleichungen des vorhergehenden Paragraphes; so erhält man die Bedingungen für die Stabilität des belasteten scheitrechten Sturzes.

§. 311. Bedingungen, daß die Wölbsteine eines scheitrechten Sturzes nicht aufeinander gleiten.

Man findet leicht, daß die Neigung eines jeden anderen mittleren Druckes gegen das Perpendikel auf dem entsprechenden Fugenschnitte kleiner ist, als die Neigung des mittleren Druckes oder Widerstandes P gegen das Perpendikel auf der Fuge AD. Ist daher diese letztere Neigung kleiner, als der Reibungswinkel



φ; so wird auch jede andere ähnliche Neigung kleiner sein, als dieser Winkel, und kein Wölbstein wird alsdann im Stande sein, auf der angränzenden Fugenfläche zu gleiten. Nun ist aber die Tangente der Neigung von P gegen das Perpendikel auf der vertikalen Fuge AD gleich $\cot \alpha$ oder gleich $\frac{2H}{L}$ (Gleichung 412). Die verlangte Bedingung wird demnach durch die Ungleichheit

$$\frac{2H}{L} < \tang \varphi \;\ldots.\; (416).$$

ausgedrückt.

Es leuchtet ein, daß das Bestreben des scheitrechten Sturzes, in Folge eines Gleitens der Wölbsteine zusammenzubrechen, umso geringer ist, je kleiner die Stärke H im Verhältniß zu der

Weite 2 L ist. Um den Sturz hiergegen noch mehr zu sichern, gibt man den Wölbsteinen zuweilen die in der Figur des vorhergehenden Paragraphes mit punktirten Linien dargestellten Formen, deren Fugenschnitte nach Einem Punkte konvergiren. Die Pressungen auf die Punkte A und B hängen nur von der Form desjenigen Theiles des scheitrechten Sturzes ab, welcher zwischen ihnen liegt, und sind von den Formen der Wölbsteine unabhängig: diese Pressungen und die Bedingungen für die Stabilität der Widerlagsmauern, welche den Sturz aufrecht erhalten, erleiden daher für keine Form der Wölbsteine eine Änderung.

§. 312. Um die Bedingungen für die Stabilität der vertikalen Pfeiler zu bestimmen, welche die Widerlagsmauern des scheitrechten Sturzes bilden, so nehme man an, diese Pfeiler erheben sich über den Punkt A um die Höhe b. Die Entfernung AG (s. §. 291) oder $k - \frac{1}{2} a$ wird alsdann durch $b \tang \alpha$, d. i. nach Gleichung (412) durch $\frac{1}{2} \frac{\mathrm{L}b}{\mathrm{H}}$ dargestellt sein. Substituirt man daher in die Gleichung (382) für k den Werth $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{L}b}{\mathrm{H}} + a\right)$ und für $\mathrm{P} \sin \alpha$ und $\mathrm{P} \cos \alpha$ die Werthe aus den Gleichungen (414) und (410); so erhält man

$$y = \tfrac{1}{2} \mathrm{L}^2 \, \frac{x - \left(b + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\, a\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right) a x + \mathrm{H\,L}}, \ldots. \quad (417)$$

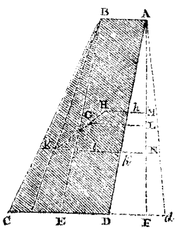
eine Gleichung, wodurch die Mittellinie des Druckes in dem Pfeiler dargestellt wird. a bezeichnet hierin die Stärke des Pfeilers, b dessen Höhe über dem Anfangspunkte A des Sturzes, L die halbe Weite des Letzteren, μ das Gewicht eines jeden Kubikfußes der Masse des Pfeilers und μ_1 das Gewicht eines jeden Kubikfußes der Masse des Sturzes.

Die Bedingungen für die Stabilität des Pfeilers können mit Hülfe der vorstehenden Gleichung ebenso, wie in den früheren Paragraphen, bestimmt werden.

Wenn der Sturz gleichförmig belastet ist; so muß für μ_1 der Werth von μ_2 aus Gleichung (415) substituirt werden.

§. 313. Der Schwerpunkt eines Strebepfeilers, dessen Außenseiten gegen die Vertikale geneigt sind.

Es bezeichne
a die obere Stärke AB des Strebepfeilers,
b die untere Stärke DC desselben,
c die vertikale Höhe AF,
α_1 die Neigung der äußeren Fläche BC gegen die Vertikale,
α_2 die Neigung der inneren Fläche AD gegen die Vertikale,
λ den Abstand GL des Schwerpunktes G des Pfeilers von der Vertikalen AF.



Ist nun H der Schwerpunkt des Parallelogrammes ADEB und K der des Dreieckes BEC; so fälle man auf AF die Perpendikel GL, HM und KN. Alsdann wird die Fläche ADEB durch ac, die Fläche BEC durch $\frac{1}{2}(b-a)c$ und die Fläche ADCB durch $\frac{1}{2}(a+b)c$ dargestellt sein, und man hat offenbar

$$\tfrac{1}{2}(a+b)c\times\lambda = ac\times\overline{\mathrm{HM}}+\tfrac{1}{2}(b-c)\,c\times\overline{\mathrm{KN}}.$$

Es ist aber

$$\mathrm{HM}=\mathrm{H}h+h\mathrm{M}=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}c\operatorname{tang}\alpha_2=\tfrac{1}{2}(a+c\operatorname{tang}\alpha_2),$$
$$\mathrm{KN}=\mathrm{K}l+lk+k\mathrm{N}=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(b-a)+a+\tfrac{2}{3}c\operatorname{tang}\alpha_2$$
$$=\tfrac{1}{3}(b+2a+2c\operatorname{tang}\alpha_2.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung und reduzirt gehörig; so kommt

$$\lambda=\frac{(a^2+ab+b^2)+(a+2b)\,c\operatorname{tang}\alpha_2}{3\,(a+b)}\;\ldots.\;(418).$$

Da nun ferner

$$b=\mathrm{CD}=\mathrm{CF}-\mathrm{DF}=c\operatorname{tang}\alpha_1+a-c\operatorname{tang}\alpha_2,$$
$$a^2+ab+b^2=(b-a)^2+3ab=c^2(\operatorname{tang}\alpha_1-\operatorname{tang}\alpha_2)^2$$
$$+3ac(\operatorname{tang}\alpha_1-\operatorname{tang}\alpha_2)+3a^2,$$
$$(a+2b)\,c\operatorname{tang}\alpha_2=[2c(\operatorname{tang}\alpha_1-\operatorname{tang}\alpha_2)+3a]\,c\operatorname{tang}\alpha_2$$
$$=2c^2(\operatorname{tang}\alpha_1-\operatorname{tang}\alpha_2)\operatorname{tang}\alpha_2+3ac\operatorname{tang}\alpha_2,$$

und mithin

$$(a^2 + ab + b^2) + (a + 2b)\,c\,\mathrm{tang}\,\alpha_2 = c^2\,(\mathrm{tang}^2\,\alpha_1 - \mathrm{tang}^2\,\alpha_2) \\ + 3ac\,\mathrm{tang}\,\alpha \;+ 3a^2;$$

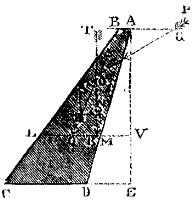
so erhält man

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}c^2\,(\mathrm{tang}^2\,\alpha_1 - \mathrm{tang}^2\,\alpha_2) + ac\,\mathrm{tang}\,\alpha_1 + a^2}{c\,(\mathrm{tang}\,\alpha_1 - \mathrm{tang}\,\alpha_2) + 2a} \;\ldots\ldots (419).$$

Wenn die Neigung der inneren Mauerfläche AD auf die entgegengesetzte Seite der Vertikalen, etwa in die Lage Ad fällt; so hat man in den vorstehenden Gleichungen α_2 oder tang α_2 negativ zu nehmen.

Die Mittellinie des Druckes in einem Strebepfeiler mit schrägen Außenseiten.

§. 314. LM sei irgend ein horizontaler Querschnitt des Pfeilers, TK eine Vertikale durch den Schwerpunkt des Theiles AMLB, welcher auf jenem Querschnitte ruhet, GO die Richtung einer Kraft, welche den Pfeiler umzuwerfen strebt, Q der Punkt, in welchem die Richtung des mittleren Druckes auf den Querschnitt LM denselben durchschneidet, V der Durchschnittspunkt der Verlängerung von LM mit der Vertikalen AE, und es bezeichne



P die in der Richtung GO angebrachte Kraft,
ι den Winkel GOT,
k den Abstand AG,
λ den Abstand KV,
x den Abstand AV,
y den Abstand VQ und
μ das Gewicht eines jeden Kubikfußes der Masse des Pfeilers, während die übrigen Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphes ungeändert bleiben.

Der Werth von λ oder der Abstand KV des Schwerpunktes des Theiles AMLB von der Vertikalen AE ist durch Gleichung (419) gegeben, wenn man darin x statt c setzt. Ist nun O der Durchschnittspunkt der Richtung der Kraft P mit der Vertikalen

TK, und stellt man durch OS die Kraft P und durch ON das Gewicht des Theiles AMLB in Größe und Richtung dar, vollendet alsdann das Parallelogramm SN und verlängert dessen Diagonale OR bis zum Durchschnitte Q mit LM; so wird OR die Richtung des mittleren Druckes auf den Querschnitt LM und Q ein Punkt der Mittellinie des Druckes sein.

Wegen ähnlicher Dreiecke hat man

$$\frac{\mathrm{QK}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{OI}};$$

es ist aber

$$\mathrm{QK} = \mathrm{QV} - \mathrm{KV} = y - \lambda,$$

$$\mathrm{OK} = \mathrm{TK} - \mathrm{TO} = \mathrm{TK} - \overline{\mathrm{TG}} \, . \cot \mathrm{GOT} = x - (\lambda + k) \cot \iota,$$

$$\mathrm{RI} = \overline{\mathrm{RN}} \sin \mathrm{RNI} = \mathrm{P} \sin \iota,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OI} = \mathrm{ON} + \mathrm{NI} &= \tfrac{1}{2} \mu \, \overline{\mathrm{AV}} \, (\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{LM}}) + \overline{\mathrm{RN}} \cos \mathrm{RNI} \\ &= \tfrac{1}{2} \mu \, x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] + \mathrm{P} \cos \iota;\end{aligned}$$

demnach

$$\frac{y - \lambda}{x - (\lambda + k) \cot \iota} = \frac{\mathrm{P} \sin \iota}{\frac{1}{2} \mu \, x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] + \mathrm{P} \cos \iota}.$$

Hieraus ergibt sich

$$y = \frac{\frac{1}{2} \lambda \mu \, x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] + \mathrm{P}\,(x \sin \iota - k \cos \iota)}{\frac{1}{2} \mu x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] + \mathrm{P} \cos \iota]}.$$

Substituirt man aber x für c in Gleichung (419) und multiplizirt beide Seiten jener Gleichung mit dem Nenner des Bruches auf der rechten Seite und mit $\frac{1}{2} \mu \, x$; so erhält man

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \lambda \mu \, x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] &= \tfrac{1}{6} \mu x^3 \, (\operatorname{tang}^2 \alpha_1 - \operatorname{tang}^2 \alpha_2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \mu x^2 \, a \operatorname{tang} \alpha_1 + \tfrac{1}{2} \mu \, x \, a^2,\end{aligned}$$

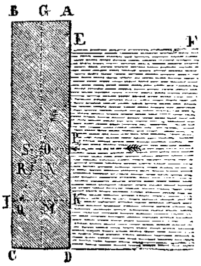
und Dies in die vorstehende Gleichung gesetzt, gibt

$$y = \frac{\frac{1}{3} \mu x^3 (\operatorname{tang}^2 \alpha_1 - \operatorname{tang}^2 \alpha_2) + \mu x^2 a \operatorname{tang} \alpha_1 + \mu x a^2 + 2\,\mathrm{P}\,(x \sin \iota - k \cos \iota)}{\mu \, x \, [2\,a + x\,(\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2)] + 2\,\mathrm{P} \cos \iota} \quad \ldots . \; (420).$$

Durch diese Gleichung wird die Mittellinie des Druckes in einem Pfeiler mit schrägen Außenseiten dargestellt. Wenn die innere Seite **AD** vertikal ist; so hat man $\tang \alpha_2 = o$ zu setzen: wenn **AD** eine Neigung nach der entgegengesetzten Seite der Vertikalen hat, wie die Linie **A**d in der Figur zu §. 313; so muß $\tang \alpha_2$ negativ genommen werden. Da die Gleichung für die Mittellinie des Druckes in Beziehung zu der Abszisse x vom dritten Grade ist; so folgt, daß es für gewisse Werthe von y drei mögliche Werthe für x gibt, und daß mithin die Kurve einen Wendepunkt besitzt.

Die Bedingungen für die Stabilität des Strebepfeilers lassen sich aus der vorstehenden Gleichung für die Mittellinie des Druckes ebenso ableiten, wie Dies schon früher bei den vertikalen Mauern geschehen ist. Wäre z. B. die obere Stärke a, die Höhe c und die Neigung α_2 der inneren Fläche **AD** gegeben; so kann die Neigung α_1 der äußeren Fläche **BC** unter der Bedingung bestimmt worden, daß die Mittellinie des Druckes die Grundfläche **CD** in einem gegebenen Abstande m von der Kante **C** durchschneide. Man braucht zu diesem Ende nur zu bemerken, daß der Abstand **CE** durch $a + c \tang \alpha_1$, also der Abstand des Durchschnittspunktes der Mittellinie des Druckes mit der Grundfläche **CD** vom Punkte **E** durch $a + c \tang \alpha_1 - m$ dargestellt wird. Substituirt man demnach c für x und $a + c \tang \alpha_1 - m$ für y in Gleichung (420); so erhält man eine Beziehung, welche man für $\tang \alpha_1$ auflösen kann. In gleicher Weise kann man daraus den Werth für irgend ein anderes Element der Stabilität des Pfeilers entwickeln, wenn man $\tang \alpha_1$ als bekannt ansieht und jene Beziehung für das fragliche Element auflös't.

Die Stabilität einer Mauer von gleichförmiger Stärke, welche den Druck einer Flüssigkeit auszuhalten hat.



§. 315. Wenn **EF** den Spiegel der Flüssigkeit, **IK** irgend einen horizontalen Querschnitt der Mauer und **EP** zwei Drittel der Tiefe **EK** darstellt; so wird aus Gründen der Hydrostatik **P** der Mittelpunkt des Druckes auf die Fläche **EK** sein, indem die Flüssigkeit die Mauer gerade in derselben Weise umzuwerfen strebt, wie Dies eine Kraft thun würde, welche in P perpendikular zu EK angebracht und dem Gewichte einer Wassermasse gleich wäre, deren Grundfläche gleich EK und deren Höhe gleich der Tiefe des Schwerpunktes von EK unter dem Spiegel EF, d. i. gleich $\frac{1}{2}$EK ist.

Setzt man nun

P gleich dem Drucke der Flüssigkeit auf die Fläche EK (deren Dimension in der Richtung der Länge der Mauer gleich Einem Fuße ist)

$$a = \mathrm{AB}, \quad x = \mathrm{GM},$$
$$e = \mathrm{AE}, \quad y = \mathrm{QM},$$

μ gleich dem Gewichte eines jeden Kubikfußes der Mauer,

μ_1 gleich dem Gewichte eines jeden Kubikfußes der Flüssigkeit,

σ gleich dem Verhältnisse $\frac{\mu}{\mu_1}$ oder auch gleich dem Verhältnisse des spezifischen Gewichtes der Mauermasse zu dem der Flüssigkeit; so hat man zuvörderst für die Kraft P den Ausdruck

$$\mathrm{P} = (x-e)\,.\,\tfrac{1}{2}(x-e)\mu_1 = \tfrac{1}{2}(x-e)^2\mu_1\,.$$

Durchschneidet nun die horizontale Richtung von P die Axe der Mauer in O, und stellt man diese Kraft durch ON dar, ferner das Gewicht des Theiles AKIB der Mauer durch ON, vollendet darauf das Rechteck SN und verlängert dessen Diagonale OR bis zum Durchschnittspunkte Q mit IK; so wird Q ein Punkt der Mittellinie des Druckes sein. Wegen ähnlicher Dreiecke hat man aber

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{NO}},$$

und es ist

$$\mathrm{QM} = y,\ \mathrm{MO} = \mathrm{KP} = \tfrac{1}{3}\mathrm{EK} = \tfrac{1}{3}(x-e),$$

$\mathrm{RN} = \mathrm{OS} = \mathrm{P} = \frac{1}{2}\mu_1\,(x-e)^2$ und $\mathrm{NO} =$ dem Gewichte von $\mathrm{ABJK} = \mu a x$. Durch Substitution dieser Ausdrücke wird die obige Beziehung

$$\frac{y}{\frac{1}{3}(x-e)} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1(x-e)^2}{\mu a x},$$

und hieraus folgt

$$y = \tfrac{1}{6} \frac{\mu_1 (x-e)^3}{\mu a x},$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch μ_1 dividirt und für das Verhältniß $\frac{\mu}{\mu_1}$ die Größe σ setzt, welche für den Fall, daß die Flüssigkeit Wasser ist, das spezifische Gewicht des Mauerwerkes darstellt,

$$y = \tfrac{1}{6} \frac{(x-e)^3}{\sigma a x}, \quad \ldots . \quad (421)$$

worin die Gleichung für die Mittellinie des Druckes in einer Mauer von gleichförmiger Stärke, welche den Druck einer Flüssigkeit auszuhalten hat, besteht.

§. 316. **Bestimmung der Stärke einer solchen Mauer von gegebener Höhe h unter der Bedingung, daß die Mittellinie des Druckes die Grundfläche in einem gegebenen Abstande m von der äußeren Fläche durchschneide.**

Substituirt man in der Gleichung (421) h für x und $\frac{1}{2}a - m$ für y und lös't die entstehende Gleichung für a auf; so erhält man

$$a = m + \sqrt{m^2 + \tfrac{1}{3} \frac{(h-e)^3}{\sigma h}} \quad \ldots . \quad (422).$$

Wenn man die Gleichung (421) unter die Form $y = \frac{1}{6\sigma a} x^2 \left(1 - \frac{e}{x}\right)^3$ bringt; so sieht man, daß y fortwährend mit x wächst, und daß demnach die Mittellinie des Druckes in dem tiefsten Querschnitte der Mauer der äußeren Fläche **BC** am nächsten kommt. Hieraus folgt, daß m in dem vorstehenden Ausdrucke den Stabilitätsmodel bezeichnet (s. §. 288).

§. 317. **Die Bedingungen, daß die Mauer nicht in Folge des Gleitens der Steine aufeinander umgeworfen werde.**

Da der Winkel **SRO** die Neigung des mittleren Druckes auf den Querschnitt JK gegen das Perpendikel auf diesem Querschnitte darstellt; so wird die gestellte Bedingung so lange erfüllt sein, als SRO kleiner ist, als der Reibungswinkel φ. Es ist aber

$$\operatorname{tang} SRO = \frac{OS}{SR} = \frac{RN}{ON} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 (x-e)^2}{\mu a x};$$

der geforderten Bedingung wird also so lange ein Genüge geleistet werden, als

$$\frac{(x-e)^2}{2\sigma a x} < \operatorname{tang}\varphi,$$

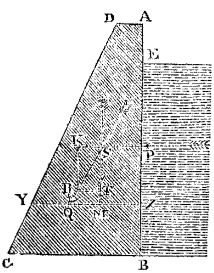
oder, wenn man diese Ungleichheit auflös't, so lange

$$x < e + \sigma a \operatorname{tang}\varphi \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2e}{\sigma a \operatorname{tang}\varphi}}\right] \quad \ldots \quad (423)$$

ist.

Die Stabilität einer Mauer von veränderlicher Stärke, welche den Druck einer Flüssigkeit auszuhalten hat.

§. 318. Nimmt man die innere Mauerfläche AB als vertikal an, so sei XY irgend ein horizontaler Querschnitt, P der Mittelpunkt des Druckes auf AX und SM eine Vertikale durch den Schwerpunkt des Theiles AXYD der Mauer. Verlängert man die horizontale Richtung des Druckes P der Flüssigkeit, welcher in seinem Mittelpunkte vereinigt gedacht wird, bis zu ihrem Durchschnitte S mit SM, stellt durch SK und durch ST resp. die Größe des Druckes P und des Gewichtes des Mauertheiles AXYD dar und entwirft das Rechteck STRK; so wird dessen Diagonale SR die Richtung und Größe des mittleren Druckes auf den Querschnitt XY und ihr Durchschnitt Q mit XY einen Punkt der Mittellinie des Druckes darstellen.



Nun sei

$$a = AD, \quad x = AX,$$
$$e = AE, \quad y = XQ,$$
$$\lambda = MX,$$

α der Neigungswinkel der äußeren Fläche **DC** gegen die Vertikale,

μ das Gewicht des Kubikfußes der Mauermasse,

μ_1 das Gewicht des Kubikfußes der Flüssigkeit,

$\sigma = \frac{\mu}{\mu_1}$ oder gleich dem Verhältnisse der spezifischen Gewichte der Mauermasse und der Flüssigkeit zueinander.

Wegen ähnlicher Dreiecke hat man

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{SM}} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{ST}},$$

und es ist $\mathrm{QM} = \mathrm{QX} - \mathrm{MX} = y - \lambda$, $\mathrm{SM} = \mathrm{PX} = \frac{1}{3}\mathrm{EX} = \frac{1}{3}(x - e)$ (s. §. 315), $\mathrm{RT} = \mathrm{SK} =$ dem Drucke der Flüssigkeit auf **EX** oder $= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{EX}} . \mu_1 \overline{\mathrm{EX}} = \frac{1}{2}\mu_1 (x - e)^2$ (s. §. 315), $\mathrm{ST} =$ dem Gewichte der Masse **AY** oder $= \frac{1}{2}(2a + x \tan \alpha) x \mu$.

Hiernach erhält man aus der obigen Beziehung

$$\frac{y - \lambda}{\frac{1}{3}(x - e)} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 (x - e)^2}{\frac{1}{2}\mu(2ax + x^2 \operatorname{tang} \alpha)},$$

oder wenn man mit $\frac{1}{3}(x - e)$ multiplizirt und σ für $\frac{\mu}{\mu_1}$ setzt, welche Größe für den Fall, daß die Flüssigkeit Wasser ist, das spezifische Gewicht des Mauerwerkes darstellt,

$$y - \lambda = \left(\frac{1}{3\sigma}\right) \frac{(x - e)^3}{2ax + x^2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

Macht man nun in Gleichung (419) $\alpha_2 = o$ und substituirt α für α_1 und x für c; so ergibt dieselbe

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + ax \operatorname{tang} \alpha + a^2}{x \operatorname{tang} \alpha + 2a} = \frac{\frac{1}{3}x^3 \operatorname{tang}^2 \alpha + ax^2 \operatorname{tang} \alpha + a^2 x}{2ax + x^2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden, so kommt

$$y = \frac{\frac{1}{3\sigma}(x - e)^3 + \frac{1}{3}x^3 \operatorname{tang}^2 \alpha + ax^2 \operatorname{tang} \alpha + a^2 x}{2ax + x^2 \operatorname{tang} \alpha}, \quad \ldots . \ (424)$$

in welcher Formel die Gleichung für die Mittellinie des Druckes besteht. Die Bedingungen der Stabilität der Mauer lassen sich hieraus durch ein ähnliches Verfahren, wie früher (§. 293, 295), entwickeln.

§. 319. Die Bedingungen, daß die Mauersteine auf ihren Lagern nicht gleiten.

Ein Gleiten der horizontalen Schichten der Mauersteine aufeinander wird nicht eintreten können, solange die Neigung von **SQ** gegen das Perpendikel auf dem Fugenschnitte **XY** kleiner ist, als der Reibungswinkel φ, d. h. solange $\mathbf{QSM} < \varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi > \operatorname{tang}\mathbf{QSM}$ oder $> \dfrac{\mathbf{RT}}{\mathbf{ST}}$ oder $> \dfrac{\frac{1}{2}\mu_1 (x-e)^2}{\frac{1}{2}(2ax + x^2 \operatorname{tang}\alpha)\mu}$ oder solange

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{(x-e)^2}{2ax+x^2\operatorname{tang}\alpha} < \operatorname{tang}\varphi \quad \ldots . (425)$$

ist.

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Ungleichheit, welcher auch auf die Form $\left(\frac{1}{\sigma}\right)\dfrac{\left(1-\frac{e}{x}\right)^2}{\frac{2a}{x}+\operatorname{tang}\alpha}$ gebracht werden kann, nimmt offenbar mit x fortwährend zu, und demnach auch der Neigungswinkel des mittleren Druckes gegen das Perpendikel auf dem entsprechenden Fugenschnitte. Hieraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit des Ausgleitens der Mauersteine für die tiefsten Schichten am größten ist, und daß ein solches Gleiten in irgend einer höheren Schicht nicht zu besorgen ist, wenn die vorstehende Bedingung für die tiefste Schicht **BC** erfüllt wird.

Erdkonstruktionen.

§. 320. Die natürliche Böschung der Erde.

Im §. 243 hat man gesehen, daß eine Masse, welche auf eine geneigte Ebene gelegt und von keinen anderen Kräften, als von ihrem Gewichte und dem Widerstande der Ebene angegriffen wird, eben noch in Ruhe bleibt, wenn die Neigung der Ebene gegen den Horizont dem Reibungswinkel für ihre Oberfläche und die der zu tragenden Masse gleich kommt. Hiernach könnte der Reibungswinkel für die Oberflächen der Bestandtheile irgend einer Erdmasse dadurch ermittelt werden, daß man fortwährend den Böschungswinkel änderte, bis man endlich einen solchen erreichte, für welchen kleine Massen derselben Erde eben noch auf der geneigten Oberfläche in Ruhe erhalten würden oder im Begriffe wären, auf derselben herabzugleiten. Dieses bei einem künstlichen Versuche einzuschlagende Verfahren wird nun bei Durchstichen oder anderen Erdarbeiten von der Natur sehr genau nachgeahmt. Wenn durch technische Mittel irgend eine Erdböschung unter einem Neigungswinkel hergestellt ist, welcher den eben erwähnten Winkel überschreitet; so kann die Kohäsion der Masse die Theilchen der Erde zwar anfänglich so fest zusammenhalten, daß sie nicht aufeinander gleiten und den natürlichen Böschungswinkel annehmen; indessen ist diese Kohäsion immer im Begriffe, durch die Einwirkung der Nässe, welche die Erdmasse durchdringt und die Theilchen auseinander rückt, oder durch den Einfluß des Frostes, welcher die Theilchen beim Gefrieren auseinandertreibt, zerstört zu werden, und die Massentheilchen der Erde sind so lange, als der Böschungswinkel den Reibungswinkel überschreitet, fortwährend im Begriffe herabzugleiten. Dieses Gleiten hört auf, sowie die Böschung den zuletzt erwähnten Winkel annimmt, und die Oberfläche der Erde bildet alsdann ihre *natürliche* Böschung.

Hiernach findet man den Reibungswinkel φ für die Bestandtheile einer jeden Erdart, wenn man die natürliche Böschung derselben beobachtet.

Die erste der beiden nachfolgenden Tabellen, welche aus Hagens Handbuche der Wasserbaukunst, 2r Theil, 1r Band, S. 37, entlehnt ist, enthält die aus verschiedenen Versuchen des Herrn Geh. Oberbauraths Hagen selbst und anderer Experimentatoren abgeleiteten Werthe des Reibungswinkels für verschiedene Erdarten. In der zweiten, aus dem **Résumé d'un Cours de Construction** von Navier entnommenen und durch das eben erwähnte Handbuch der Wasserbaukunst vervollständigten Tabelle finden sich die spezifischen Gewichte einiger Erden und Mauerkörper.

Natürliche Böschung verschiedener Erden und anderer aus Körnern bestehender Massen.

Bezeichnung der Erden.	Natürlicher Böschungswinkel oder Werth von φ
Dammerde oder Lehm in trockenem Zustande . .	30^0
desgl., in feuchtem Zustande	45^0
desgl., ganz mit Wasser durchzogen	17^0
desgl., festgestampft	$66 - 74^0$
Feiner und trockener Staubsand	27^0
Reiner trockener Streusand, Grand und feiner Kies	26^0
desgl., in feuchtem Zustande	32^0
Unregelmäßige Kieselsteine	45^0
Abgerundete Kiesel und Schrot	23^0
Getreide und andere Samen, nach der Glätte der Körner	$30 - 35^0$

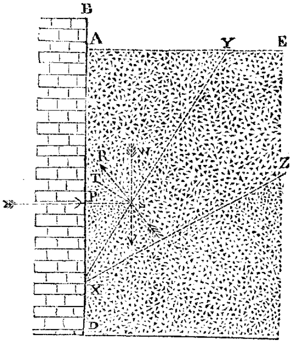
Spezifische Gewichte verschiedener Erden und Mauerkörper.

Bezeichnung der Erden und Mauerkörper.	Spezifisches Gewicht.
Pflanzenerde	1,4
Sandige Erde	1,6
Mergel	2
Sandboden	1,7
Staubsand	1,52
Streusand	2,27
Rauhes Mauerwerk von kalkigen und kieseligen Steinen	1,7 — 2,3
Rauhes Mauerwerk von Granit	2,3
Rauhes Mauerwerk von Basalt	2,5

§. 321. Der horizontale Druck der Erde und das Prisma vom größten Drucke.

BD sei die innere vertikale Seite einer Mauer, welche den Druck einer Erdmasse auszuhalten hat, deren Oberfläche **AE** horizontal ist. **P** stelle die Resultante aller Pressungen dar, welche sich auf irgend einen Theil AX der Mauer äußern. Vernachlässigt man bei den folgenden Untersuchungen die Kohäsion der Erdtheilchen unter sich und ihre Reibung an der inneren Mauerfläche; so leuchtet ein, daß hierdurch die Dimensionen der Mauer etwas stärker ausfallen werden, als es zur Erhaltung des Gleichgewichtes erforderlich sein würde.

Die Erdmasse, welche auf die Mauerfläche AX drückt, wird sich nun in der Richtung irgend eines schiefen Schnittes XY von der übrigen Masse abzulösen streben.



Nimmt man diese Richtung XY, in welcher der Bruch der Erde zuerst erfolgen würde, wenn die Mauer plötzlich entfernt würde, vorläufig als bekannt an und bezeichnet den Winkel AXY dieser Richtung gegen die Vertikale mit ι, das Gewicht des prismatischen Erdkörpers AXY, dessen Dimension in der Richtung der Länge der Mauer gleich Einem Fuße ist, mit W und den aus dem Schube der Erdmasse AXY hervorgehenden horizontalen Druck gegen die Mauer mit P; so begreift man, daß das Gewicht W durch die Widerstände der einzelnen Theile der Mauerfläche AX, deren Resultante gleich P ist, und durch den Widerstand R der Fläche XY im Gleichgewichte erhalten werden muß. Denkt man sich nun die Erdmasse AXY im Begriffe, auf der Ebene XY herabzugleiten, und die Kraft P gerade von dem Betrage, daß sie im Stande ist, dieses Gleiten zu verhindern; so wird die Resultante SR der Widerstände der verschiedenen Punkte von XY gegen die Normale ST unter einem Winkel RST gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Berührungsflächen des Erdkörpers geneigt sein.

Da hiernach der Druck P, das Gewicht W und der Widerstand R drei Kräfte im Gleichgewichte sind; so müssen sich je zwei derselben umgekehrt zueinander verhalten, wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die dritte (§. 14), und man hat

$$\frac{P}{W} = \frac{\sin WSR}{\sin PSR} \text{ oder } P = W \frac{\sin WSR}{\sin PSR}.$$

Es ist aber

$$WSR = WST - RST = AYX - RST = \frac{\pi}{2} - \iota - \varphi$$

und $$PSR = PST + RST = AXY + RST = \iota + \varphi;$$

mithin

$$P = \frac{W}{\operatorname{tang}(\iota + \varphi)} \quad \ldots . \quad (426).$$

Ferner ist, wenn man μ_1 gleich dem Gewichte eines jeden Kubikfußes der Erdmasse und $AX = x$ setzt,

$$W = \tfrac{1}{2}\mu \ \overline{AX}.\overline{AY} = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \operatorname{tang}\iota;$$

folglich auch

$$P = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 x^2 \operatorname{tang}\iota}{\operatorname{tang}(\iota + \varphi)} \quad \ldots . \quad (427).$$

Der Werth des vorstehenden Ausdruckes, welcher den erforderlichen Widerstand der Mauer gegen den Druck der keilförmigen Erdmasse AXY darstellt, ist von dem Werthe des Winkels ι abhängig, sodaß, wenn man verschiedene Bruchflächen, wie XY, annimmt, eine jede hierdurch abgeschnittene Erdmasse einen anderen Widerstand der Mauer erfordern wird. Je größer der Winkel ι angenommen wird, desto schwerer wird die keilförmige Masse, und desto größer würde P werden, wenn diese Ursache allein wirkte: gleichzeitig nimmt aber mit dem Wachsen des Winkels ι die Neigung der Ebene YX gegen den Horizont ab, und durch diese Ursache würde P vermindert werden, wenn sie allein wirkte. Diese beiden Ursachen, welche einander in der angeführten Weise entgegenwirken, bestimmen demnach eine gewisse Neigung der Ebene YX, für welche der Druck P am größten wird. Wäre die Mauer nun stark genug, dem Drucke derjenigen keilförmigen Erdmasse zu widerstehen, deren Neigung ι einem Maximum des Werthes von P entspricht; so leuchtet ein, daß die Erde verhindert wird, unter einem jeden beliebigen Böschungswinkel auszugleiten, indem die Mauer alsdann gegen das Gleiten unter irgend einem anderen Neigungswinkel offenbar noch mehr Widerstandsfähigkeit besitzt, als überhaupt erforderlich ist.

Bietet die Mauer also einen Widerstand dar, welcher dem größtmöglichen Werthe von P in Beziehung zu der Veränderlichen ι gleich ist; so wird sie durch den Druck der Erde gegen die Fläche AX nicht umgeworfen werden: ist ihr Widerstand aber geringer; so wird sie jedenfalls umgeworfen werden, da sie nicht die gehörige Festigkeit besitzt, um das Ausgleiten der Erde unter dem Winkel ι, welcher dem Maximum von P entspricht, zu verhindern.

Um den wirklichen Druck der Erde gegen AX zu bestimmen, hat man also bloß das Maximum des Werthes von P in Beziehung zu ι zu ermitteln. Dieses Maximum ist derjenige Werth, welcher den Bedingungen

$$\frac{dP}{d\iota}=o \text{ und } \frac{d^2P}{d\iota^2}<o$$

ein Genüge leistet. Differenziirt man aber die Gleichung (427) in Beziehung zu ι; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{dP}{d\iota}=\tfrac{1}{4}\mu_1\, x^2\, \frac{\sin 2(\iota+\varphi)-\sin 2\iota}{\cos^2\iota\,.\sin^2(\iota+\varphi)} \quad \ldots . \ (428).$$

Bezeichnet man den Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung resp. mit p und q; so erhält man durch eine nochmalige Differenziation

$$\frac{d^2P}{d\iota^2}=\tfrac{1}{4}\mu_1\, x^2\, \frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{d\iota}q-\frac{dq}{d\iota}p\right).$$

Für den Fall aber, daß $\frac{dP}{d\iota}=o$, wird $p=o$ und demnach

$$\frac{d^2P}{d\iota^2}=\tfrac{1}{4}\mu_1 x^2\, \frac{1}{q}\frac{dp}{d\iota}\,.$$

Substituirt man hierin für q seinen Werth; so folgt, daß für jeden Werth von ι, für welchen die erste Bedingung des Maximums erfüllt wird, der zweite Differenzialkoeffizient

$$\frac{d^2P}{d\iota^2}=\tfrac{1}{2}\mu_1 x^2\, \frac{\cos 2(\iota+\varphi)-\cos 2\iota}{\cos^2\iota\,.\sin^2(\iota+\varphi)} \quad \ldots . \ (429).$$

ist.

Aus der Gleichung (428) folgt, daß die Bedingung $\frac{dP}{d\iota}=o$

durch denjenigen Werth von ι erfüllt wird, für welchen $\sin 2(\iota+\varphi) = \sin 2\iota$ ist. Diese Gleichheit findet statt, wenn entweder $2(\iota+\varphi)=2\iota$, oder wenn $2(\iota+\varphi)=\pi-2\iota$ ist. Da nun die erste dieser beiden Annahmen entweder zu der Ungereimtheit $\varphi=o$, oder, im Fall φ wirklich $=o$ wäre, zu der Unbestimmtheit $\iota=\iota$ führt; so ist dieselbe ganz zu verwerfen und der gesuchte Werth von ι aus der zweiten Annahme abzuleiten. Diese ergibt

$$\iota = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \ldots\ldots (430).$$

Substituirt man diesen Werth für ι in die Gleichung (429); so wird dieselbe

$$\frac{d^2 \mathrm{P}}{d\iota^2} = \mu_1 x^2 \, \frac{-\sin\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) . \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad \ldots\ldots (431)$$

ein Ausdruck, welcher stets negativ ist, und demnach beweis't, daß auch die zweite Bedingung des Minimums durch jenen Werth von ι erfüllt wird.

Da der obige Werth von ι dem Maximum von P entspricht; so erhält man für das Letztere, wenn man jenen Werth von ι in Gleichung (427) substituirt

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)},$$

oder wenn man beachtet, daß $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1$ und demnach

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} . \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}$$

und

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}},$$

also

$$\frac{1}{\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

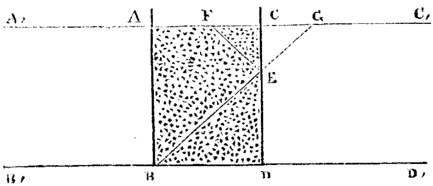
ist,

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \,\mathrm{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots . \,(432).$$

Dieser Ausdruck stellt den wirklichen Druck der Erde gegen eine vertikale Mauerfläche AX dar, deren Höhe gleich x ist und deren Länge Einen Fuß beträgt. Den Erdkörper, dessen vertikaler Querschnitt AXY ist, und bei welchem der Winkel AXY $=\iota$ durch die Gleichung (430) bestimmt ist, nennt man das Erdprisma vom größten Drucke. Aus dem obigen Werthe des Winkels ι geht hervor, daß wenn ZX die natürliche Böschung der in Rede stehenden Erde darstellt, sodaß Winkel AXZ $=\frac{\pi}{2}-\varphi$ ist (s. §. 320), die schiefe Ebene YX des Prismas vom größten Drucke den Winkel AXZ halbirt.

§. 321 a. Fall, wo die Erdmasse zwischen zwei vertikalen Wänden eingeschlossen ist.

Der durch Gleichung (432) dargestellte Werth von P gibt auch alsdann noch den horizontalen Druck einer Erdmasse gegen eine vertikale Wand AB an, wenn die Erstere zwischen zwei beliebig weit voneinander abstehenden vertikalen Wänden AB und CD eingeschlossen ist, sodaß es ganz gleichgültig ist, ob die Grundfläche BE des Prismas vom größten Drucke die horizontale Oberfläche AC der Erde zwischen den beiden Wänden schneidet, oder in einem unterhalb liegenden Punkte E die zweite Wand CD trifft.



Dieser Satz erhellet, wenn man sich eine nach beiden Seiten unbegränzte Erdmasse $A_1 C_1 D_1 B_1$ mit horizontaler Oberfläche $A_1 C_1$ denkt, und alsdann den gesammten horizontalen Druck betrachtet, welcher in irgend einer vertikalen Durchschnittsebene AB herrscht. Bezeichnet man denselben mit P_1; so leuchtet ein, daß das Gleichgewicht der ganzen Masse nur dadurch besteht, daß die beiden Massen A_1ABB_1 und AC_1D_1B gegenseitig den Druck P_1 aufeinander ausüben. Denkt man sich nun den Druck der Masse A_1ABB_1 dadurch ersetzt, daß die Ebene AB plötzlich fest würde oder sich in eine vertikale Wand verwandelte; so wird hierdurch der Zustand des Gleichgewichtes der Masse ACC_1B offenbar in Nichts geändert, und da nun nach den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphes der Druck der letzteren Erdmasse gegen die Wand AB gleich P (Gleichung 432) ist; so folgt, daß der in einem jeden vertikalen Querschnitte, wie AB, herrschende Druck $P_1 = P$ sein müsse. Eben dasselbe gilt für irgend eine andere vertikale Durchschnittsebene, wie CD. Denkt man sich aber auch diese in eine feste Wand verwandelt; so erhält man die abgeschlossene Erdmasse ACDB, welche sowol gegen die vordere, wie gegen die hintere Wand einen durch die Formel (432) gegebenen horizontalen Druck äußert.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist auch durch direkte Versuche des Herrn Geh. Oberbauraths Hagen *) bestätigt worden. Derselbe erklärt diese Erscheinung dadurch, daß wenn das unvollständige Erdprisma vom größten Drucke BECA beim Zurückweichen der vorderen Wand auf der Grundfläche EB wirklich herabgleite, gleichzeitig ein anderes Prisma vom größten Drucke EFC, welches dem Supplemente EGC des ersteren unvollständigen Prismas gleich ist, auf der Ebene FE rückwärts gleite. Hierdurch werde sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt der ganzen Erdmasse BECA bei eintretender Bewegung der Wand AB gerade um so viel senken, wie Dies der Schwerpunkt des vollständigen Prismas vom größten Druche BGA thun würde. Da nun der Widerstand, welchen die vertikale Wand leisten muß, um die Senkungen der fraglichen Schwerpunkte zu verhüten, in beiden Fällen gleich sein muß; so folgt die Richtigkeit des obigen Satzes unmittelbar.

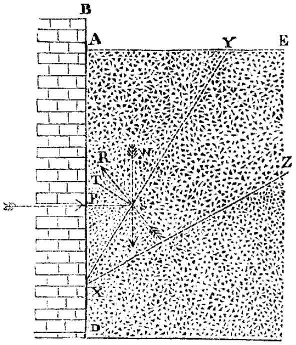
Über die Strenge des letzteren Beweises kann durchaus kein Zweifel bleiben, sobald man darauf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anwendet, welches fordert, daß die Arbeit

*) Handbuch der Wasserbaukunst, 2r Theil, 1r Band, S. 33.

des horizontalen Widerstandes der Wand AB und der auf den Berührungsflächen BEF oder BEG stattfindenden Reibung bei einer unendlich kleinen Bewegung des im Gleichgewichte befindlichen Systemes gleich der Arbeit der Schwere sei, welche sich bei der Senkung des Schwerpunktes der Erdmasse in den beiden obigen Fällen entwickelt (§. 126).

Futtermauern.

§. 322. Wenn eine Futtermauer anstatt des Druckes einer Erdmasse, von welcher Ein Kubikfuß μ_1 Pfund wiegt, den Druck einer Flüssigkeit auszuhalten hätte, von welcher Ein Kubikfuß $\mu_1 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ Pfund wöge; so würde der Druck der Flüssigkeit auf die Fläche AX nach hydrostatischen Prinzipien gleich



$$\tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

Pfund sein. Aus einer Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem der Gleichung (432) ersieht man, daß der Druck einer Erdmasse gegen eine vertikale Wand (wenn ihre Oberfläche horizontal ist und sich bis an die Wand erstreckt) in jeder Beziehung identisch ist mit dem Drucke einer eingebildeten Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht von der Art ist, daß ein jeder Kubikfuß ihres Volums das absolute Gewicht

$$\mu_2 = \mu_1 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots \quad (433)$$

in Pfunden besitzt. Setzt man daher diesen Werth von μ_2 an die Stelle von μ_1 in den Gleichungen (421) und (424) und bezeichnet das Verhältniß $\frac{\mu}{\mu_1}$ oder auch das Verhältniß des spezifischen Gewichtes des Mauerkörpers zu dem der gegebenen Erdmasse mit σ; so erhält man für die Mittellinien des Druckes in einer Futtermauer von gleichförmiger oder veränderlicher Stärke, deren innere Fläche vertikal ist, resp. die Gleichungen

$$y = \frac{1}{6} \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{(x-e)^3}{\sigma a \pi} \quad \ldots . \quad (434)$$

(wobei die y von der Mitte der Mauer aus gemessen sind) und

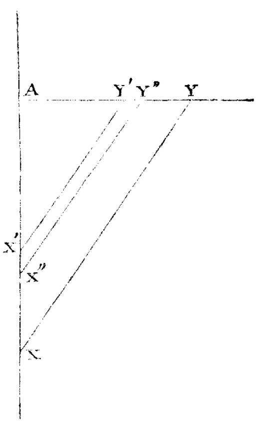
$$y = \frac{\frac{1}{3\sigma}\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)(x-e)^3 + \frac{1}{3}x^3 \operatorname{tang}^2\alpha + a x^2 \operatorname{tang}\alpha + a^2 x}{2 a x + x^2 \operatorname{tang}\alpha} \quad \ldots . \quad (435)$$

(wobei die y von der inneren Mauerfläche aus gemessen sind)*).

---

*) Die Assimilation des vorliegenden Falles, wo der Druck gegen die vertikale Mauerfläche durch eine Erdmasse hervorgebracht wird, mit dem einer Flüssigkeit von verändertem spezifischen Gewichte würde noch mehr in die Augen springen, wenn man nachwiese, daß nicht allein die Resultante P aller Pressungen auf die einzelnen Theile der Fläche AX dem Gesammtdrucke jener Flüssigkeit auf dieselbe Fläche gleich wäre, sondern daß auch ihr Angriffspunkt P in derselben Tiefe unter dem Punkte A läge, in welchem der Angriffspunkt des Druckes der Flüssigkeit unter diesem Punkte liegt, daß also $AP = \frac{2}{3} AX$ sei.

Diese Übereinstimmung kann auf folgende Weise dargethan werden.



Denkt man sich durch zwei beliebige Punkte X′ und X″ der Linie AX, welche um die Größe $X'X'' = \triangle x'$ voneinander abstehen, die Linien X′Y′ und X″Y″ parallel zu XY gelegt; so wird der Erddruck auf die Fläche AX′, wenn man $AX' = x'$ und die Konstante

$$\frac{1}{2}\mu_1 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = c$$

setzt, nach Gleichung (432) durch

$$P' = c x'^2$$

und der Druck auf die Fläche AX″ durch

$$P'' = c(x' + \triangle x')^2$$

dargestellt sein. Der durch die Erdmasse X′X″Y″Y′ auf X′X″ hervorgebrachte Druck ist demnach

$$P'' - P' = c(x' + \triangle x')^2 - c x'^2$$
$$= c(2x' + \triangle x')\triangle x'.$$

Nimmt man nun $\triangle x'$ unendlich klein $= dx'$ an und vernachlässigt demzufolge dx' gegen $2x'$; so geht der Werth des Ausdruckes $P'' - P'$ in das Differenzial von P′ über und wird

$$dP' = 2 c x' dx'.$$

Das Moment dieses elementaren Druckes auf das Flächenelement X′X″ $= dx'$ in Beziehung zum Punkte A ist

Die Bedingungen der Stabilität der Futtermauer lassen sich aus diesen Gleichungen für die zugehörige Mittellinie des Druk-kes auf demselben Wege ableiten, welcher vorhin bei einer gewöhnlichen Mauer eingeschlagen ist.

§. 323. **Die Bedingungen, das eine Futtermauer nicht in Folge des Gleitens der Steine auf ihren Lagern umgeworfen werde.**

Diese sind offenbar durch die Ungleichheit (425) bestimmt, wenn man darin μ_2 (Gleichung 433) an die Stelle von μ_1 setzt. Hierdurch erhält man, wenn man, zur Unterscheidung von dem Reibungswinkel φ für die Erdmasse, den Reibungswinkel für die Mauersteine mit φ_1 bezeichnet,

$$\frac{1}{\sigma}\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\frac{(x-e)^2}{2ax+x^2\operatorname{tang}\alpha}<\operatorname{tang}\varphi_1 \quad \ldots . \; (436)$$

σ steht in diesem Ausdrucke für das Verhältniß des spezifischen Gewichtes des Mauerkörpers zu dem der Erdmasse.

Wie in §. 319, so kann man auch hier zeigen, daß das Bestreben der Mauersteine aufeinander zu gleiten umso größer ist, je tiefer dieselben unter dem Scheitel der Mauer liegen.

$$d\,M = 2\,c\,x'^2\,d\,x',$$

und demnach das Moment aller elementaren Pressungen auf die ganze Fläche **AX**

$$M = \int_0^x 2\,c\,x'^2\,d\,x' = \tfrac{2}{3}\,c\,x^3.$$

Bezeichnet man nun den Abstand des Angriffspunktes des mittleren Druckes **P** auf die ganze Fläche **AX** vom Punkte **A** mit x_1; so hat man bekanntlich $\mathbf{M} = x_1\,\mathbf{P}$, d. i. nach dem vorstehenden Ausdrucke

$$x_1\,P = \tfrac{2}{3}\,c\,x^3,$$

also

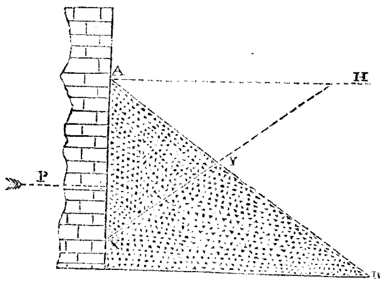
$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\,c\,x^3}{P},$$

d. i., wenn man für **P** seinen Werth $c x^2$ aus Gleichung (432) substituirt,

$$x_1 = \tfrac{2}{3}\,x,$$

was zu erweisen war.

§. 324. Der Druck einer Erdmasse, deren Oberfläche gegen den Horizont geneigt ist.



AB sei die Oberfläche einer solchen Erdmasse, XY die Ebene, in welcher der Bruch der mit der Fläche AX einer Futtermauer in Berührung befindlichen Masse vor sich zu gehen strebt. Setzt man

$$AX = x, \qquad \sphericalangle AXY = \iota, \qquad \sphericalangle XAB = \beta;$$

so findet man ebenso, wie in §. 321, wenn man das Gewicht der Masse AXY mit W bezeichnet,

$$P = \frac{W}{\tang(\iota + \varphi)} = W \cot(\iota + \varphi).$$

Nun ist $W = \frac{1}{2}\mu_1 \overline{AX}.\overline{AY} \sin\beta$, oder weil

$$AY = \frac{x \sin\iota}{\sin(\iota + \beta)} \text{ ist, } W = \frac{1}{2}\mu_1 \frac{x^2 \sin\iota . \sin\beta}{\sin(\iota + \beta)} =$$

$$\frac{1}{2}\mu_1 \frac{x^2}{\cot\iota + \cot\beta};$$

demnach

$$P = \frac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{\cot(\iota + \varphi)}{\cot\iota + \cot\beta} \quad \ldots . (437).$$

Um den Werth von ι zu entwickeln, für welchen diese Funktion ein Maximum wird, substituire man für $\cot(\iota + \varphi)$ seinen Werth $\frac{\cot\iota . \cot\varphi - 1}{\cot\iota + \cot\varphi}$; hierdurch wird der vorstehende Ausdruck

$$P = \frac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{\cot\iota . \cot\varphi - 1}{(\cot\iota + \cot\varphi)(\cot\iota + \cot\beta)}.$$

Differenziirt man denselben für $\cot\iota$, setzt den Differenzialkoeffizienten gleich null, und entwickelt aus der entstehenden Gleichung den Werth von $\cot\iota$; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\cot\iota = \tang\varphi + \frac{\sqrt{1+\cot\varphi\,.\cot\beta}}{\cos\varphi} \dots. (438).$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (437) und reduzirt gehörig; so erhält man für den gesuchten Erddruck

$$P = \tfrac{1}{2}\,\mu_1\,x^2 \left\{\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi\sqrt{1+\cot\varphi\,.\cot\beta}}\right\}^2 \dots. (439).$$

Man sieht, daß in diesem Falle der Druck der Erde mit dem einer Flüssigkeit identisch ist, von welcher Ein Kubikfuß

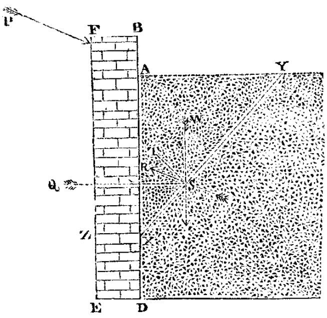
$$\mu_8 = \mu_1 \left\{\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi\sqrt{1+\cot\varphi\,.\cot\beta}}\right\} \dots. (440).$$

wiegt.

Die Bedingungen für die Stabilität einer Futtermauer, welche den Druck einer solchen Erdmasse auszuhalten hat, ergeben sich hiernach auf ähnliche Weise, wie bei den Wassermauern in §. 315 und 318.

Der Widerstand der Erde.

§. 325. **BDEF** sei eine Mauer, welche durch den Widerstand einer Erdmasse aufrecht erhalten wird, indem eine auf der entgegengesetzten Seite angebrachte Kraft **P** dieselbe umzustürzen strebt. Die Oberfläche **AY** der Erde sei horizontal, und **Q** sei der Druck, welcher, gegen die Fläche **AX** angebracht, gerade hinreichen würde, um die mit der Mauer in Berührung befindliche Masse zurückzudrängen, sodaß das Prisma **AXY** längs der Fläche **XY** aufwärts glitte.



Behält man die Bezeichnungen des §. 321 bei und verfährt in derselben Weise wie dort, bemerkt aber, daß hier die Richtung **SR** des Widerstandes der Fläche **XY** auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels **ST** liegt, da die Erdmasse AXY im Begriffe **nach oben** zu gleiten angenommen wird (§. 143); so findet man

$$Q = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{\operatorname{tang}\iota}{\operatorname{tang}(\iota-\varphi)} \;\ldots\; (441).$$

Nun leuchtet ein, daß XY diejenige Ebene ist, in welcher ein Bruch durch den **kleinsten** Werth von Q erfolgen kann: demnach ist ι in der vorstehenden Gleichung derjenige Winkel, für welchen der Ausdruck von Q ein Minimum wird. Um denselben zu bestimmen, bemerke man, daß die Gleichung (441) von der Gleichung (427) nur durch das Zeichen von φ abweicht, und daß das zweite Differenzial (Gleichung 431) durch eine Änderung des Zeichens von φ durchaus positiv wird. Es folgt hieraus unmittelbar, daß der gesuchte Werth von ι

$$\iota = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

und der Werth der Kraft Q, welche im Stande ist, den Erddruck auf die Fläche AX zu überwinden,

$$Q = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \;\ldots\; (442).$$

ist.

§. 326. Es leuchtet ein, daß eine Flüssigkeit denselben Widerstand gegen den Umsturz der Mauer darbieten würde, wenn sie von einem solchen spezifischen Gewichte wäre, daß Ein Kubikfuß ihrer Masse

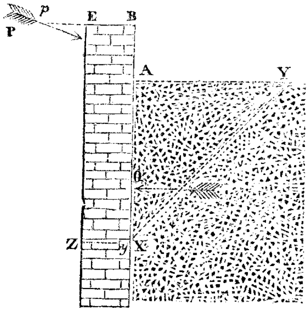
$$\mu_4 = \mu_1 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

wöge. Hieraus (und aus der Note zu §. 322) folgt auch, daß der Punkt in der Fläche AX, gegen welchen die Kraft Q wirkend gedacht werden muß, in einer Tiefe gleich $\frac{2}{3}$ von AX unter der Oberfläche AY der Erdmasse liegt.

§. 327. **Die Stabilität einer Mauer von gleichförmiger Stärke, gegen welche eine gegebene Kraft P**

angebracht ist, und welche durch den Widerstand einer Erdmasse aufrecht erhalten wird.

Wenn **XZ** irgend ein horizontaler Querschnitt der Mauer ist, und wenn die Resultante aller Kräfte, welche auf den Theil **EBXZ** der Mauer wirken, mit Einfluß des gesammten Widerstandes **Q**, den die Erde auf diesen Theil zu leisten im Stande ist, jenen Querschnitt in y durchschneidet; so sei



$$Be = a, \qquad BX = x,$$
$$Bp = k, \qquad Xy = y,$$
$$BA = e,$$

ϑ der Neigungswinkel der Kraft **P** gegen die Vertikale und μ das Gewicht eines jeden Kubikfußes des Mauerwerkes.

Nimmt man die Momente aller auf **EBXZ** wirkender Kräfte für den Punkt y und bemerkt, daß $\mathrm{XQ} = \frac{1}{3}(x - e)$ und daß das Perpendikel von y auf die Richtung der Kraft **P** gleich $x \sin\vartheta - (k - y)\cos\vartheta$ ist; so erhält man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\mathrm{P}\,[x \sin\vartheta - (k - y)\cos\vartheta] = \tfrac{1}{3}(x - e)\,\mathrm{Q} + (\tfrac{1}{2}a - y)\,a x \mu,$$

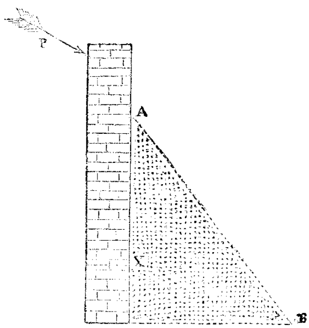
oder wenn man für **Q** seinen Werth $\frac{1}{2}\mu_4\,(x - e)^2$ (s. Gleichung 442 und 443) substituirt, und für y auflös't,

$$y = \frac{\frac{1}{6}\mu_4\,(x - e)^3 + \frac{1}{2}\mu\,a^2 x - \mathrm{P}\,(x \sin\vartheta - k\cos\vartheta)}{\mu a x + \mathrm{P}\cos\vartheta} \quad \ldots\ldots \;(444).$$

Nun leuchtet ein, daß die Mauer über irgend einem Querschnitte **XZ** durch die Wirkung der Kraft **P** nicht umgeworfen worden wird, solange der größte Widerstand **Q**, welchen die darüber liegende Erde zu leisten vermag, groß genug ist um zu verursachen, daß die Resultante aller auf **EX** wirkender Kräfte jenen Querschnitt innerhalb der Mauer durchschneidet, oder solange y in der vorstehenden Gleichung einen positiven Werth behält. Ferner begreift man, daß die **Stabilität der Mauer durch das Minimum des Werthes von y in Beziehung zu x aus jener Gleichung bestimmt ist, und daß die** größte Höhe, bis zu welcher die Mauer aufgeführt werden kann, ohne umgeworfen zu werden, durch denjenigen Werth von x gegeben ist, für welchen $y = o$ wird.

§. 328. Die Stabilität einer Mauer, gegen welche eine gegebene Kraft angebracht ist, und welche durch den Widerstand einer Erdmasse, deren Oberfläche nicht horizontal ist, aufrecht erhalten wird.

Durch ähnliche Schlüsse, wie in §. 324, gelangt man zu dem Resultate, daß der Widerstand Q der mit irgend einem Theile AX der Mauer in Berührung begriffenen Erde dadurch bestimmt ist, daß man in Gleichung (439) den Winkel φ mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Hieraus folgt, daß jener Widerstand gleichbedeutend ist mit dem einer Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht von der Art ist, daß



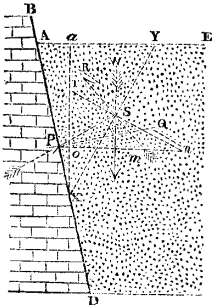
Ein Kubikfuß ihrer Masse

$$\mu_5 = \mu_1 \left\{ \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi \sqrt{1 - \cot\varphi . \cot\beta}} \right\}^2 \dots . \text{ (445).}$$

wiegt. Demnach sind auch die Bedingungen für die Stabilität einer vertikalen Mauer, welche durch den Druck einer solchen Erdmasse aufrecht erhalten wird, ganz denen gleich, welche man aus Gleichung (444) des vorhergehenden Paragraphs erhält, wenn man darin das Zeichen μ_4 mit μ_5 (Gleichung 445) vertauscht.

§. 329. Die Stabilität einer Futtermauer, deren innere Fläche unter einem beliebigen Winkel gegen die Vertikale geneigt ist, wenn man dabei auch auf die Reibung der Erde an der Mauerfläche Rücksicht nimmt.

α_2 sei der Neigungswinkel der inneren Mauerfläche gegen die Vertikale und φ_2 der Reibungswinkel für die Erdmasse und die Oberfläche der Mauer; hinsichtlich der übrigen Elemente der Aufgabe werden die Bezeichnungen des §s. 321 beibehalten und die daselbst vorgenommene Konstruktion auch hier ausgeführt. Errichtet man auf **BD** das Perpendikel **PQ**, so ist die Richtung



PS des Widerstandes der Mauer gegen die Erdmasse im Gränzzustande des Gleichgewichtes, wo die Mauer eben im Begriffe ist, umgeworfen zu werden, gegen **PQ** unter einem Winkel **SPQ** geneigt, welcher dem Reibungswinkel φ_2 gleich kommt (§. 143). Diese Neigung hat die Richtung des Widerstandes der Mauer übrigens nicht bloß im Gränzzustande, sondern auch in jedem anderen Zustande des Gleichgewichtes (s. weiter unten das Prinzip des kleinsten Widerstandes §. 334).

Zieht man daher $\mathbf{P}n$ horizontal und $\mathbf{X}a$ vertikal, verlängert **TS** und **RS** bis zu den Durchschnittspunkten m und n der Horizontalen $\mathbf{P}n$ und bezeichnet den Winkel $a\mathbf{XY}$ mit ι und die vertikale Höhe $a\mathbf{X}$ mit x; so hat man

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{W}} = \frac{\sin \mathrm{WSR}}{\sin \mathrm{PSR}} = \frac{\sin(\mathrm{WST} - \mathrm{TSR})}{\sin(\mathrm{R}m\mathrm{P} + \mathrm{SP}m)}.$$

Es ist aber

$$\mathrm{WST} = a\,\mathrm{YX} = \frac{\pi}{2} - a\,\mathrm{XY} = \frac{\pi}{2} - \iota,\ \mathrm{TSR} = \varphi,$$

$$\mathrm{R}m\mathrm{P} = \mathrm{T}n\mathrm{P} + m\,\mathrm{S}n = o\,\mathrm{XY} + \mathrm{RST} = \iota + \varphi,$$

$$\mathrm{SP}m = \mathrm{SPQ} + \mathrm{QP}n = \varphi_2 + \alpha_2;$$

demnach

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{W}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \iota - \varphi\right)}{\sin(\iota + \varphi + \varphi_2 + \alpha_2)} = \frac{\cos(\iota + \varphi)}{\sin(\iota + \alpha_2 + \varphi + \varphi_2)}.$$

Ferner ist $\mathrm{W} = \frac{1}{2}\mu_1\, \overline{a\mathrm{X}} \cdot \overline{\mathrm{AY}} = \frac{1}{2}\mu_1 x^2 (\tan\iota + \tan\alpha_2)$ und hiernach

$$P = \frac{1}{2}\mu_1 x^2 \; \frac{\cos(\iota + \varphi)(\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\alpha_2)}{\sin(\iota + \alpha_2 + \varphi + \varphi_2)} \;\ldots\; (446).$$

Dieser Ausdruck muß in Beziehung zu der Veränderlichen ι ein Maximum werden; setzt man daher $\alpha_2 + \varphi + \varphi_2 = \beta$, differenziirt für ι und nimmt $\frac{dP}{d\iota} = o$; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$-(\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\alpha_2)\cos(\beta - \varphi) + \frac{\cos(\iota+\varphi) \,.\, \sin(\iota + \beta)}{\cos^2\iota} = o$$

oder

$$-(\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\alpha_2)(1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\varphi)$$
$$+ (1 - \operatorname{tang}\iota \,.\, \operatorname{tang}\varphi)(\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\beta) = o$$

oder

$$\operatorname{tang}^2\iota + 2\operatorname{tang}\iota \,.\, \operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\beta \,.\, \cot\varphi + (\operatorname{tang}\beta + \cot\varphi)\operatorname{tang}\alpha_2 = o.$$

Löst man diese quadratische Gleichung für $\operatorname{tang}\iota$ auf, vernachlässigt die negative Wurzel, da $\operatorname{tang}\iota$ wesentlich positiv sein muß, und reduzirt gehörig; so kommt

$$\operatorname{tang}\iota = \sqrt{(\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha_2)(\operatorname{tang}\beta + \cot\varphi)} - \operatorname{tang}\beta \;\ldots\; (447)$$

Wird der durch diese Gleichung bestimmte Werth von ι in den zweiten Differenzialkoeffizienten von P substituirt; so nimmt derselbe einen negativen Werth an, und daraus folgt, daß dieser Werth von ι wirklich jenem Maximum von P entspricht, durch welches nach §. 321 der Druck der Erde gegen den Theil AX der Mauer dargestellt wird.

Um durch Substitution des Werthes von ι aus Gleichung (447) in Gleichung (446) das gesuchte Maximum des Erddruckes P zu erhalten, bemerke man zuvörderst, daß

$$\frac{\cos(\iota + \varphi)}{\sin(\iota + \varphi)} = \left(\frac{1 - \operatorname{tang}\iota \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\beta}\right) \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$$

ist. Nach Gleichung (447) hat man aber

$$1 - \operatorname{tang}\iota \,.\, \operatorname{tang}\varphi$$
$$= 1 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi \sqrt{(\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha_2)(\operatorname{tang}\beta + \cot\varphi)}$$
$$= \operatorname{tang}\varphi \sqrt{\operatorname{tang}\beta + \cot\varphi} \left\{ \sqrt{\operatorname{tang}\beta + \cot\varphi} - \sqrt{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha_2} \right\}$$

und

$$\operatorname{tang} \iota + \operatorname{tang} \beta = \sqrt{(\operatorname{tang} \beta + \cot \varphi)(\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2}\,,$$

demnach $$\frac{\cos(\iota + \varphi)}{\sin(\iota + \beta)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} \left\{ \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \beta + \cot \varphi}{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2}} - 1 \right\}.$$

Ferner erhält man

$$\operatorname{tang} \iota + \operatorname{tang} \alpha_2 = \sqrt{(\operatorname{tang} \beta \ \cot \varphi)(\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2)} - (\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2)$$

$$= \sqrt{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2} \left\{ \sqrt{\operatorname{tang} \beta + \cot \varphi} - \sqrt{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2} \right\}$$

und hiernach

$$P = \tfrac{1}{2} \mu_1 x^2 \frac{\sin \varphi}{\cot \beta} \left\{ \sqrt{\operatorname{tang} \beta + \cot \varphi} - \sqrt{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \alpha_2} \right\}^2,$$

ein Ausdruck, welcher unter die folgende, zur logarithmischen Rechnung besser geeignete Form gebracht werden kann

$$P = \tfrac{1}{2} \mu_1 x^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \beta} \left\{ \sqrt{\frac{\cos(\beta - \varphi)}{\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{\cos \alpha_2}} \right\}^2,$$

oder wenn man wiederum $\alpha_2 + \varphi + \varphi_2$ für β substituirt,

$$P = \tfrac{1}{2} \mu_1 x^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^2(\alpha_2 + \varphi + \varphi_2)} \left\{ \sqrt{\frac{\cos(\alpha_2 + \varphi_2)}{\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_2)}{\cos \alpha_2}} \right\}^2 \quad \ldots . \ (448).$$

Aus einer Vergleichung dieser Formel mit dem Ausdrucke (432) geht hervor, daß der Druck der Erde gegen eine Futtermauer unter den angenommenen Voraussetzungen mit dem Drucke einer vollkommenen Flüssigkeit identisch ist, von welcher das Gewicht eines jeden Kubikfußes durch den Werth des Koeffizienten von $\frac{1}{2} x^2$ in der vorstehenden Gleichung dargestellt wird. Die Bedingungen der Stabilität einer solchen Futtermauer stimmen daher mit denen einer Mauer überein, welche den Druck einer Flüssigkeit von dem eben bezeichneten Gewichte auszuhalten hat, jedoch mit dem Unterschiede, daß der Druck der Erde nicht in perpendikularer Richtung zu der Mauerfläche, sondern in einer Richtung ausgeübt wird, welche sich gegen das Perpendikel unter dem Reibungswinkel φ_2 neigt. *)

*) Wenn man von der Wirkung der Reibung der Erdmasse an der Mauerfläche **BD** abstrahiren will, was auf die Annahme hinausläuft, daß sich der Wi-

§. 330. Der Druck einer Erdmasse, welche höher liegt, als der Scheitel einer Futtermauer, und sich gegen dieselbe abböscht.

Bisher ist angenommen, daß die Oberfläche der Erdmasse, deren Druck von einer Futtermauer aufgenommen wird, horizontal sei und sich bis dicht an die Mauer erstrecke: nehmen wir

---

derstand der Mauer in perpendikularer Richtung zu **BD** äußere; so braucht man in den vorstehenden Formeln nur $\varphi_2 = 0$ zu setzen. Hierdurch reduzirt sich die Gleichung (447) auf

$$\operatorname{tang} \iota = \frac{1}{\cos(\alpha_2 + \varphi)} - \operatorname{tang}(\alpha_2 + \varphi)$$

oder auch

$$\operatorname{tang} \iota + \operatorname{tang}(\alpha_2 + \varphi) = \frac{1}{\cos(\alpha_2 + \varphi)}, \text{ d. i.}$$

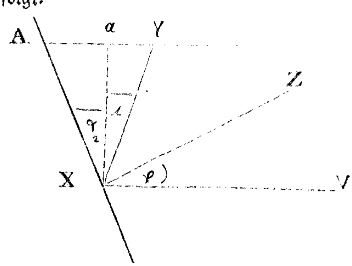
$$\frac{\sin(\iota + \alpha_2 + \varphi)}{\cos \iota \,.\, \cos(\alpha_2 + \varphi)} = \frac{1}{\cos(\alpha_2 + \varphi)} \text{ oder}$$

$$\sin(\iota + \alpha_2 + \varphi) = \cos \iota,$$

$$\text{woraus } \iota + \alpha_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} - \iota \text{ oder}$$

$$\iota = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_2 + \varphi}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha_2 + \varphi)\right]$$

folgt.



Wäre demnach **XV** horizontal und $\angle$**ZXV** gleich dem natürlichen Böschungswinkel φ; so würde unter der hier gemachten Voraussetzung die Linie **XY**, in welcher der anfängliche Bruch der Erdmasse zu erfolgen strebt, den Winkel **AXZ** halbiren

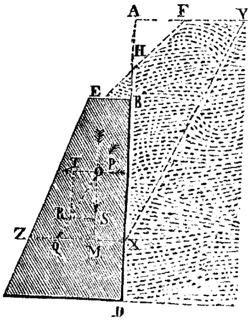
Wenn man auch in Gleichung (446) $\varphi_2 = 0$ setzt; so wird dieselbe

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{\cos(\iota + \varphi)\,(\operatorname{tang} \iota + \operatorname{tang} \alpha_2)}{\sin(\iota + \alpha_2 + \varphi)} = \frac{\cos(\iota + \varphi)\,.\,\sin(\iota + \alpha_2)}{\cos \alpha . \cos \iota . \sin(\iota + \alpha_2 + \varphi)},$$

d. i., wenn man für ι den vorstehenden Werth substituirt,

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1 x^2 \frac{1}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_2 - \varphi}{2}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_2 - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_2 + \varphi}{2}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_2 + \varphi}{2}\right)}$$

jetzt an, die horizontale Oberfläche der Erde liege höher, als der Scheitel der Mauer, und bösche sich gegen dieselbe unter dem natürlichen Böschungswinkel ab. Es sei **EF** die natürliche Böschung der Erde, **FY** ihre horizontale Oberfläche, **BX** irgend ein Theil der inneren vertikalen Mauerfläche,



P der horizontale Druck, welcher gerade hinreichend ist, um die Erdmasse **HXYF**, deren Gewicht

W ist, auf der geneigten Ebene **XY** im Gleichgewichte zu erhalten. Verlängert man **XB** und **YF** bis zu dem Durchschnitte in **A**; so sei x der Abstand **AX**,

c der Abstand **AH**,

φ der natürliche Böschungswinkel **FEB**,

ι der Winkel **AXY**,

μ_1 das Gewicht eines jeden Kubikfußes der Erdmasse.

Durch ein dem früheren ganz ähnliches Verfahren kann gezeigt werden, daß der wirkliche Druck der Erde auf den Theil **BX** der Mauer durch denjenigen Werth von **P** dargestellt wird, welcher in Beziehung zu der Veränderlichen ι ein Maximum ist; außerdem hat man, bei Vernachlässigung der Reibung an der Mauerfläche **BX**,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{\operatorname{tang}(\iota + \varphi)},$$

worin $\mathrm{W} = \mu_1 \times$(Fläche **HXYH**)$= \mu_1 \times$(Fl. **AXY**—Fl. **HAF**) $= \mu_1 \left(\frac{1}{2} x^2 \operatorname{tang} \iota - \frac{1}{2} c^2 \cot \varphi\right)$ ist; demnach

---

oder, da allgemein $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \psi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right)$ ist,

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2} \mu_1 x^2 \frac{1}{\cos \alpha_2} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)} \right\}^2,$$

ein Ausdruck, welcher mit der Gleichung (432) übereinstimmt, wenn die innere Mauerfläche vertikal oder $\alpha_2 = 0$ ist.

$$P = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 (x^2 \operatorname{tang}\iota - c^2 \cot\varphi)}{\operatorname{tang}(\iota + \varphi)}, \ldots. (449).$$

oder wenn man $\operatorname{tang}(\iota + \varphi)$ entwickelt,

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1 \frac{(x^2 \operatorname{tang}\iota - c^2 \cot\varphi)(1 - \operatorname{tang}\iota . \operatorname{tang}\varphi)}{\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\varphi}.$$

Um die Differenziation zu erleichtern, setze man $\operatorname{tang}\iota + \operatorname{tang}\varphi = z$. Man bemerkt leicht, daß die Bedingungen, unter welchen die vorstehende Funktion in Beziehung zu ι ein Maximum wird, ganz identisch sind mit denen, unter welchen dieselbe in Beziehung zu $\operatorname{tang}\iota$ oder auch in Beziehung zu z ein Maximum wird, indem die Forderungen $\frac{dP}{d\iota} = o$ und $\frac{d^2P}{d\iota^2} < o$ nothwendig zu denselben Resultaten führen, wie die Forderungen $\frac{dP}{dz} = o$ und $\frac{d^2P}{dz^2} < 0$. Setzt man daher in die vorstehende Gleichung $\operatorname{tang}\iota = z - \operatorname{tang}\varphi$, also $1 - \operatorname{tang}\iota . \operatorname{tang}\varphi = 1 - z \operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}^2\varphi = -z\operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{\cos^2\varphi}$ und $x^2 \operatorname{tang}\iota - c^2 \cot\varphi = x^2 z - (x^2 \operatorname{tang}\varphi + c^2 \cot\varphi)$; so wird dieselbe nach gehöriger Reduktion

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1 \left\{ -zx^2 \operatorname{tang}\varphi - \frac{x^2 \operatorname{tang}\varphi + c^2 \cot\varphi}{z \cos^2\varphi} + x^2 \operatorname{tang}^2\varphi + c^2 + \frac{x^2}{\cos^2\varphi} \right\} \ldots. (450).$$

Hieraus folgt

$$\frac{dP}{dz} = \tfrac{1}{2}\mu_1 \left\{ -x^2 \operatorname{tang}\varphi + \frac{x^2 \operatorname{tang}\varphi + c^2 \cos\varphi}{z^2 \cos^2\varphi} \right\},$$

$$\frac{d^2P}{dz^2} = -\mu_1 \frac{x^2 \operatorname{tang}\varphi + c^2 \cot\varphi}{z^3 \cos^2\varphi}.$$

Die erste Bedingung des Maximums von P ist daher durch die Gleichung

$$-x^2 \operatorname{tang}\varphi + \frac{x^2 \operatorname{tang}\varphi + c^2 \cot\varphi}{z^2 \cos^2\varphi} = o \ldots. (451).$$

dargestellt, woraus nach gehöriger Reduktion

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{x^2\sin^2\varphi}}$$

folgt.

Die zweite Bedingung des Maximums wird offenbar durch einen jeden positiven Werth von z, und demnach durch die positive Wurzel der vorstehenden Gleichung erfüllt. Nimmt man daher die Wurzelgröße mit dem positiven Zeichen, und substituirt für z wiederum seinen Werth; so kommt

$$\operatorname{tang}\iota = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{x^2\sin^2\varphi}} - \operatorname{tang}\varphi \ldots. (452).$$

Durch diese Gleichung ist die Tangente des Neigungswinkels **AXY** der Grundfläche **XY** der keilförmigen Erdmasse **HXYF**, deren Druck von der Fläche **BX** der Mauer ertragen wird, gegen die Vertikale bestimmt. Um den wirklichen Druck gegen die Mauer anzugeben, hat man diesen Werth von $\operatorname{tang}\iota$ in die Formel (450) zu setzen. Bringt man zu diesem Ende die beiden ersten Glieder zwischen der Klammer auf der rechten Seite jener Gleichung unter die Form

$$-z\left\{x^2\operatorname{tang}\varphi + \frac{x^2\operatorname{tang}\varphi + c^2\cot\varphi}{z^2\cos^2\varphi}\right\};$$

so erhellet aus der Beziehung (451), daß die beiden Glieder dieses Ausdruckes einander gleich sind, sodaß der ganze Ausdruck mit $-2zx^2\operatorname{tang}\varphi$, oder wenn man für z seinen Werth setzt, mit $-2x^2\operatorname{tang}\varphi\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{x^2\sin^2\varphi}}$ oder mit $-\frac{2x}{\cos\varphi}\times\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi + c^2}$ gleichbedeutend ist. Hiernach ergibt die Gleichung (450)

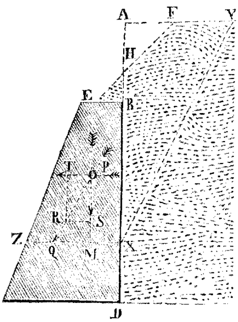
$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1\left\{-\frac{2x}{\cos\varphi}\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi + c^2} + (x^2\operatorname{tang}^2\varphi + c^2) + \frac{x^2}{\cos^2\varphi}\right\}$$

das ist

$$P = \tfrac{1}{2}\mu_1\left\{\frac{x}{\cos\varphi} - \sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi + c^2}\right\}^2 \ldots. (453).$$

Dieser Ausdruck stellt den wirklichen Druck dar, welcher sich auf einen Theil der inneren Mauerfläche äußert, deren tiefster Punkt um den Abstand x unter dem Punkte **A** liegt.

§. 331. **Die Bedingungen, daß eine Futtermauer mit Überhöhung der dahinter liegenden Erde nicht in Folge des Gleitens der Mauersteine auf ihren Lagern umgeworfen werde.**



Wenn φ_1 den Reibungswinkel für die Steine der Mauer in den Fugen und **OQ** die Richtung des mittleren Druckes auf die horizontale Fuge **XZ** darstellt; so sind die gesuchten Bedingungen (nach §. 141) in der Ungleichheit $\mathbf{QOM} < \varphi_1$ oder $\operatorname{tang} \mathbf{QOM} < \operatorname{tang} \varphi_1$ enthalten. Nun hat man aber

$$\operatorname{tang} \mathbf{QOM} = \frac{\mathbf{RS}}{\mathbf{OS}} = \frac{\mathbf{P}}{\text{Gewicht von } \mathbf{BZ}} \; ^{*)}.$$

Für **P** ist hierin sein Werth aus Gleichung (453) zu setzen. Um den Werth des Gewichtes von **BZ** zu bestimmen, so setze man

$a =$ der oberen Mauerstärke,
$b =$ dem Abstande **AB**,
$\alpha =$ dem Neigungswinkel der äußeren Mauerfläche gegen die Vertikale und
$\mu =$ dem Gewichte eines jeden Kubikfußes der Mauer.

Alsdann hat man

$$\text{Gewicht von } \mathbf{BZ} = \tfrac{1}{2}\mu(x-b)[(x-b)\operatorname{tang}\alpha + 2a].$$

Substituirt man diesen und den Werth von **P** in die obige Ungleichheit; so ergibt sich für die gesuchte Bedingung

$$\frac{\frac{\mu_1}{\mu}\left\{\frac{x}{\cos\varphi} - \sqrt{x^2 \operatorname{tang}^2\varphi + c^2}\right\}^2}{(x-b)[(x-b)\operatorname{tang}\alpha + 2a]} < \operatorname{tang}\varphi_1 \ldots . (454)$$

---

*) Hierbei und bei der folgenden Untersuchung ist der Einfluß der kleinen Erdmasse **HBE** auf das Gleichgewicht der Konstruktion vernachlässigt.

§. 332. **Die Mittellinie des Druckes in einer Futtermauer mit Überhöhung der dahinter liegenden Erde.**

Bezeichnet man unter Beibehaltung der Benennungen der beiden vorhergehenden Paragraphe noch mit

y die Ordinate QX der Mittellinie des Druckes, mit
x_1 den Abstand AP des Angriffspunktes des Erddruckes P von der Horizontalen AY, mit
W das Gewicht des Mauertheiles BZ und mit
λ den Abstand XM der Vertikalen, welche durch den Schwerpunkt des Gewichtes W geht, von dem Punkte X;

so hat man wegen ähnlicher Dreiecke

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{OS}}.$$

Es ist aber $\mathrm{QM}=y-\lambda$, $\mathrm{OM}=x-x_1$, $\mathrm{RS}=\mathrm{P}$, $\mathrm{OS}=\mathrm{W}$; demnach

$$\frac{y-\lambda}{x-x_1}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{W}} \text{ oder}$$

$$y=\frac{\mathrm{P}x-\mathrm{P}x_1+\mathrm{W}\lambda}{\mathrm{W}} \quad \ldots . (455)$$

Der Werth von λ ist durch Gleichung (419) bestimmt, wenn man darin $x-b$ für c, α für α_1 und $\alpha_2=0$ setzt; hierdurch ergibt sich

$$\lambda=\frac{\frac{1}{3}(x-b)^2\operatorname{tang}^2\alpha+a(x-b)\operatorname{tang}\alpha+a^2}{(x-b)\operatorname{tang}\alpha+2a}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{W}=\tfrac{1}{2}\mu(x-b)[(x-b)\operatorname{tang}\alpha+2a], \quad \ldots . (456)$$

also

$$\mathrm{W}\lambda=\tfrac{1}{2}\mu(x-b)[\tfrac{1}{3}(x-b)^2\operatorname{tang}^2\alpha+a(x-b)\operatorname{tang}\alpha+a^2].$$

Um den Werth des Gliedes $\mathrm{P}x_1$ zu bestimmen, so geht aus §. 16 hervor, daß das Produkt $\mathrm{P}x_1$ gleich der Summe der Momente aller Pressungen der Erde auf die einzelnen Flächenelemente ist, aus denen die ganze Mauerfläche BX besteht. Setzt man nun den Druck P, welcher eine Funktion von x ist, $=f(x)$;

so stellt $f(x)$ den Druck der Erde auf einen Theil der Fläche **BX** dar, welcher in einem Abstande gleich x von **A** endigt, und $f(x+\triangle x)$ stellt den Druck auf einen Theil dieser Fläche dar, welcher in einem Abstande gleich $x+\triangle x$ von **A** endigt. Hiernach ist $f(x+\triangle x)-f(x)$ der Druck der Erde auf das Flächenelement $\triangle x$, welches zwischen jenen Abständen liegt. Nach dem Taylorschen Lehrsatze hat man aber

$$f(x+\triangle x)-f(x)=\frac{df(x)}{dx}\triangle x+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\frac{(\triangle x)^2}{1.2}+\text{etc.}$$

$$=\frac{d\mathrm{P}}{dx}\triangle x+\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\cdot\frac{(\triangle x)^2}{1.2}+\text{etc.}$$

oder wenn man $\triangle x$ sehr klein annimmt und die Glieder von höheren Potenzen, als die erste, gegen das in die erste Potenz multiplizirte Glied vernachlässigt,

$$f(x+\triangle x)-f(x)=\frac{d\mathrm{P}}{dx}\triangle x.$$

Da nun der vorstehende Ausdruck den auf das Flächenelement von der Höhe $\triangle x$ sich äußernden Druck darstellt; so hat man für das Moment dieses Druckes in Beziehung zum Punkte **A** $x\frac{d\mathrm{P}}{dx}\triangle x$ und für die Summe der Momente aller elementaren Pressungen auf **BX** $\Sigma x\frac{d\mathrm{P}}{dx}\triangle x$, oder wenn $\triangle x$ unendlich klein angenommen wird, $\int_c^x x\frac{d\mathrm{P}}{dx}dx$ *). Demnach ist

$$\mathrm{P}\,x_1=\int_c^x x\frac{d\mathrm{P}}{dx}dx.$$

---

*) Bei diesen Untersuchungen ist zwar der Einfluß des Gewichtes der kleinen Erdmasse **HBE** auf die Bedingungen des Gleichgewichtes vernachlässigt; es leuchtet aber ein, daß das vorstehende Intregal bis zu der Höhe $\mathrm{AH}=c$ und nicht etwa bis zu der Höhe $\mathrm{AB}=b$ genommen werden muß, indem der in der Ebene **HB** sich äußernde Theil des Gesammtdruckes **P** ebenfalls auf die Mauer übertragen wird. Diese Annahme entspricht zwar der Voraussetzung, daß

Differenziirt man aber die Gleichung (453) in Beziehung zu x; so kommt

$$\frac{dP}{dx}=\mu_1\left(\frac{x}{\cos\varphi}-\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}\right)\left(\frac{1}{\cos\varphi}-\frac{x\operatorname{tang}^2\varphi}{\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}}\right)$$

Führt man die Multiplikation der Faktoren auf der rechten Seite dieser Gleichung aus und beachtet, daß

$$\frac{x^2\operatorname{tang}^2\varphi}{\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}}=\frac{(x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2)-c^2}{\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}}=\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}$$

$$-\frac{c^2}{\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}}$$ ist; so kommt

$$\frac{dP}{dx}=\mu_1\left\{x\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}+\operatorname{tang}^2\varphi\right)-\frac{2}{\cos\varphi}\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}+\frac{c^2}{\cos\varphi\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}}\right\}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $x\,dx$ und integrirt zwischen den Gränzen x und c; so ergibt sich, wenn man die in c^3 multiplizirten Glieder gehörig reduzirt,

$$Px_1=\mu_1\left\{\tfrac{1}{3}x^3\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}+\operatorname{tang}^2\varphi\right)-\frac{2}{3\cos\varphi\operatorname{tang}^2\varphi}\sqrt{(x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{c^2}{\cos^2\varphi.\operatorname{tang}^2\varphi}\sqrt{x^2\operatorname{tang}^2\varphi+c^2}-\frac{c^3}{3\operatorname{tang}^2\varphi}\right\}\quad\ldots.(457)$$

Substituirt man diesen Werth von Px_1 und die Werthe von $W\lambda$, W, P aus den Gleichungen (456) und (453) in Gleichung (455); so erhält man die Gleichung für die Mittellinie des Druckes, aus welcher sich alle Bedingungen für die Stabilität der Futtermauer, wie früher, ableiten lassen. *)

---

die Begränzungsebene EF der Erdmasse mit der Bruchebene XY parallel sei, was in der Wirklichkeit nicht stattfindet; indessen hat diese irrige Voraussetzung nur zur Folge, daß das Moment des Druckes P etwas zu stark gefunden werden wird, weil die Linie XY stets steiler ist, als HF, und daß man in Folge dieses Umstandes der Mauer etwas mehr Stabilität geben wird, als streng genommen erforderlich sein würde.

*) Das Resultat der vorstehenden Untersuchung würde zu einer viel einfacheren und demnach für die praktische Anwendung viel geeigneteren Formel führen, wenn man gleich anfangs von der Voraussetzung ausgegangen wäre, daß sich die Erdmasse bei EF in einer Ebene abböschte, welche der Bruchebene XY parallel wäre und durch den Punkt H ginge (s. d. vorhergehende Note). Da

Die Gränzen welche sich der Verfasser bei diesem Werke gesetzt hat, gestatten nicht, in die Untersuchung dieses Falles der Futtermauern, dessen Anwendung auf die Theorie der Festungs-

---

die Ebene **XY** stets steiler ist, als die natürliche Böschung; so sieht man, daß diese Hypothese, welche in der Wirklichkeit nicht stattfindet, eine geringe Vermehrung der Stabilität der Futtermauer über das erforderliche Bedürfniß nach sich zieht.

Dies vorausgesetzt, so findet man für den im Anfange des §s. 330 gegebenen Ausdruck von P, wenn man mit W_1 das Gewicht einer Erdmasse **AXY** und mit W_2 das einer Erdmasse **AHF** bezeichnet,

$$P = \frac{(W_1 - W_2)}{\mathrm{tang}(\iota + \varphi} = \frac{\mu_1 \frac{1}{2} x^2 \mathrm{tang}\, \iota - \mu_1 \frac{1}{2} c^2 \mathrm{tang} \iota}{\mathrm{tang}\,(\iota + \varphi)} = \tfrac{1}{2} \mu_1\, (x^2 - c^2) \frac{\mathrm{tang}\, \iota}{\mathrm{tang}(\iota + \varphi)}$$

und demnach, wie in §. 321, für das Maximum dieses Ausdruckes in Beziehung zu ι oder für den wirklichen Druck der Erde gegen den Theil **HX** der Ebene **AD**

$$P = \tfrac{1}{2} \mu_1\, (x^2 - c^2)\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Man erkennt, daß der Werth dieses Ausdruckes gleich der Differenz der Pressungen ist, welche eine Erdmasse **AXY** und eine Erdmasse **AHF** auf die Ebene **AD** äußern würden, und daß demnach das Moment des Druckes **P** oder das Produkt $\mathbf{P} x_1$ gleich der Differenz der Momente jener beiden Erdpressungen sein wird. Nach §. 322 liegt aber der Angriffspunkt des Druckes der Masse **AXY** um $\frac{2}{3} x$ unter **A** und der Angriffspunkt des Druckes der Masse **AHF** um $\frac{2}{3} c$ unter demselben Punkte **A**; demnach hat man für die Differenz der Momente dieser beiden Erdpressungen

$$P\, x_1 = \tfrac{2}{3} x \cdot \tfrac{1}{2} \mu_1\, x^2 \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \tfrac{2}{3} c \cdot \tfrac{1}{2} \mu_1\, c^2\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\, \mu_1\, (x^3 - c^3)\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

und hieraus

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3} \mu_1\, (x^3 - c^3)\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{P} = \frac{\frac{1}{3} \mu_1\, (x^3 - c^3)\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{2} \mu_1\, (x^2 - c^2)\, \mathrm{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \tfrac{2}{3} \left(\frac{x^3 - c^3}{x^2 - c^2}\right) = \tfrac{2}{3} \left(\frac{x^2 + c\,x + c^2}{x + c}\right).$$

Substituirt man diese Werthe für **P** und $\mathbf{P} x_1$ und die obigen Werthe von **W** und $\mathbf{W}\lambda$ in die Gleichung (455); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion für die Gleichung der Mittellinie des Druckes mauern sich von selbst darbietet, noch weiter auszudehnen. Der Leser, welcher über diesen Gegenstand eine noch umfassendere Belehrung wünscht, wird auf die Abhandlung von Poncelet, „Mémoire sur la Stabilité des Revêtements et de leurs Fondations“ (unter dem Titel »Über die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente« ins Deutsche übersetzt von Lahmeyer) verwiesen, in welcher er den Gegenstand in allen seinen praktischen Beziehungen mit der gewohnten Originalität und Gründlichkeit jenes Schriftstellers entwickelt findet. Die obige Methode hat mit der von Poncelet angenommenen übrigens Nichts weiter gemein, als das Koulombsche Prinzip des Prismas vom größten Drucke. Schließlich wird noch bemerkt, daß nach der oben erwähnten Abhandlung eine praktische Regel von Vauban den Durchschnittspunkt der Mittellinie des Druckes mit der Grundfläche der Futtermauer gewöhnlich in einen Abstand von der durch den Schwerpunkt der Mauer gehenden Vertikalen gleich $\frac{4}{9}$ des Abstandes dieser Vertikalen von der äußeren Kante der Mauer bringt.

Der Gewölbbogen.

§. 333. Eine jede der Konstruktionen, für welche die Bedingungen der Stabilität bisher untersucht sind, war von der

---

$$y = \frac{\frac{1}{3}\mu_1 (x-c)(x^2+cx-2c^2)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mu(x-b)\left[\frac{1}{3}(x-b)^2\operatorname{tang}^2\alpha+a(x-b)\operatorname{tang}\alpha+a^2\right]}{\mu\,(x-b)\left[(x-b)\operatorname{tang}\alpha+2\,a\right]}$$

und für den Fall, daß die Futtermauer überall von gleicher Stärke, also $\operatorname{tang}\alpha = 0$ wäre,

$$y = \tfrac{1}{2}\,a + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)\frac{(x-c)\,(x^2+c\,x-2\,c^2)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{a\,(x-b)},$$

wobei in beiden Fällen die y von der inneren Mauerfläche **AD** aus gemessen sind.

Wenn die Höhe **AH** im Verhältnisse zu **AD** gering wäre; so würden die vorstehenden Formeln für die praktische Anwendung noch dadurch sehr vereinfacht werden, daß man darin $c = 0$ setzte und annähme, daß die Mauer den Druck einer rechtwinklig abgeschnittenen Erdmasse **YAD** zu ertragen hätte.

Art, daß sie mit dem letzten ihrer Elemente auf einer **einzigen** widerstehenden Fläche ruhete. Dieser Umstand machte es möglich, den Widerstand eines jeden Elementes unmittelbar aus den einzelnen Kräften zu bestimmen, welche auf die übrigen Elemente angebracht waren, indem derselbe immer der Resultante dieser Kräfte gleich und entgegengesetzt war.

Der Gewölbbogen ist nun ein System von Körpern, welches mit seinen äußersten Elementen auf **zwei** widerstehenden Flächen, den Endflächen der sogenannten **Widerlagen**, ruhet. Die Widerstände dieser Flächen sind im Gleichgewichte mit den auf den Bogen wirkenden Kräften (einschließlich der Gewichte der Wölbsteine); aber die Richtung und Größe des mittleren Druckes auf eine jede Fläche hängt von dem unbekannten Widerstande der entgegengesetzten Fläche ab, und Dies hat zur Folge, daß die allgemeine Methode der Bestimmung der Mittellinie des Druckes und der Bedingungen der Stabilität, welche auf die weite Klasse derjenigen Konstruktionen Anwendung findet, welche auf einer einzigen widerstehenden Fläche ruhen, in dem Falle des Gewölbbogens unzulänglich wird.

§. 334. Das Prinzip des kleinsten Widerstandes.

Man denke sich ein System von Körpern, welche nur durch die Berührung ihrer Oberflächen miteinander in Verbindung stehen; die Lage und Form dieser Berührungsflächen sei jedoch von der Art, daß alle Körper des Systemes ein Ganzes von unveränderlicher Gestalt bilden, solange die darauf angebrachten Kräfte innerhalb gewisser Gränzen liegen. Befinden sich nun in diesem Systeme mehrere widerstehende Punkte, und zerlegt man die Resultante aller auf das System angebrachten äußeren Kräfte (mit Einfluß der Gewichte der Theile des Systemes) nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente in Komponenten, deren Richtungen durch die widerstehenden Punkte gehen und der Richtung der allgemeinen Resultante parallel sind; so werden die Widerstände jener festen Punkte den eben erwähnten Komponenten offenbar gleich und entgegengesetzt sein, sobald die Punkte fähig sind, in der Richtung dieser Komponenten oder in der Richtung der Resultante der Kräfte des Systemes Widerstand zu leisten.

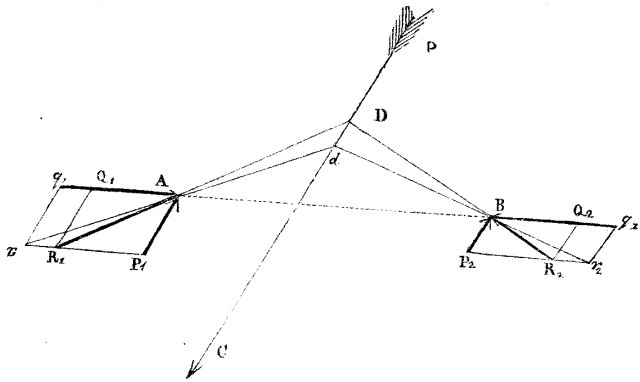
Besitzen die festen Punkte diese Fähigkeit aber nicht (etwa wegen einer besonderen physischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen) und sind sie demnach nur im Stande, in gewissen anderen Richtungen Widerstand zu leisten, oder erzeugen sich zwischen den Bändern des Systemes nothwendig Pressungen, welche nicht in jener allgemeinen Richtung der Resultante liegen und deren Wirkung sich ebenfalls mit auf die widerstehenden Punkte überträgt; so müssen sich an diesen Punkten außer den vorhin erwähnten Komponenten noch andere widerstehende Seitenkräfte äußern, welche sich, wenn sie für alle widerstehenden Punkte genommen werden, gegenseitig vernichten, welche sich aber an einem jeden widerstehenden Punkte mit der entsprechenden der vorhin genannten Komponenten zu einer Kraft zusammensetzen, deren Richtung eine solche ist, daß der widerstehende Punkt in derselben Widerstand zu leisten vermag. Man wird in vielen Fällen finden, daß man statt der obigen Seitenkräfte, welche die Richtungen der Widerstände an den einzelnen festen Punkten von der Richtung der allgemeinen Resultante des Systemes ablenken, und welche sich an dem Systeme gegenseitig vernichten, unendlich viel Kräfte substituiren kann, welche sämmtlich der Größe nach voneinander verschieden, aber sämmtlich im Stande sind, das System im Gleichgewichte zu erhalten. Das Prinzip des kleinsten Widerstandes besteht nun darin, daß diese Seitenkräfte, wenn sie durch den Widerstand fester Punkte geleistet werden, die kleinsten von allen denen sind, welche das System ebenfalls im Gleichgewichte erhalten würden, wenn man sie neben den obigen Komponenten der allgemeinen Resultante des Systemes an den widerstehenden Punkten als äußere Kräfte anbrächte. Hieraus geht hervor, daß das vorstehende Prinzip auch so ausgedrückt werden kann, daß die Richtungen, in welchen die festen Punkte Widerstand leisten, diejenigen sind, welche sich von der Richtung der allgemeinen Resultante aller auf das System angebrachten Kräfte am wenigsten weit entfernen; denn es leuchtet ein, daß je kleiner die vorhin erwähnten Seitenkräfte sind, welche sich mit den Komponenten der allgemeinen Resultante zu den wirklichen Widerständen der festen Punkte zusammensetzen, desto geringer die Abweichung der Richtungen dieser Widerstände von der Richtung jener Komponenten oder von der Richtung der Resultante aller Kräfte des Systemes sein wird.

Um diesen Satz zu erweisen, wird es zweckmäßig sein, einige verschiedene Fälle seiner Anwendung ins Auge zu fassen.

Nimmt man zuvörderst an, in dem Systeme von Körpern, auf welche beliebige äußere Kräfte (worunter auch die Gewichte der einzelnen Körper gehören) angebracht sind, befinde sich nur ein einziger widerstehender Punkt; so leuchtet ein, daß die Resultante sämmtlicher äußeren Kräfte des Systemes durch diesen Punkt gehen und daß der Widerstand dieses Punktes jener Resultante gleich und entgegengesetzt sein müsse. Denn was für innere Pressungen auch durch die äußerlich auf das System angebrachten Kräfte zwischen den einzelnen Körpern des Systems ins Leben gerufen werden mögen; dieselben müssen immer von der Art sein, daß sich je zwei derselben, welche durch Ein und denselben gemeinschaftlichen Berührungspunkt zweier solcher Körper gehen, gegenseitig vernichten. Hieraus folgt, daß die Resultante aller dieser inneren Pressungen immer gleich null ist, und daß die gemeinschaftliche Resultante aller inneren und aller äußeren Kräfte des Systemes gleich der Resultante der letzteren Kräfte allein ist. Da nun das ganze System durch den Widerstand eines einzigen festen Punktes im Gleichgewichte erhalten werden soll; so ist es nothwendig, daß die eben erwähnte Resultante durch diesen Punkt gehe, und daß derselbe fähig sei, in der Richtung jener Resultante mit einer der Letzteren gleichen Kraft Widerstand zu leisten. Besitzt der widerstehende Punkt diese Eigenschaft nicht; so kann das System unter den gegebenen Bedingungen durchaus nicht im Gleichgewichte erhalten werden.

Anders ist es, wenn zwei widerstehende Punkte **A** und **B** vorhanden sind. In diesem Falle sei **PC** die Richtung der Resultante **P** aller auf das System angebrachten äußeren Kräfte, welche, wie leicht zu erachten, mit den Punkten **A** und **B** in derselben Ebene liegen muß: Zerlegt man diese Resultante nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente in zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen durch die Punkte **A** und **B** gehen und der Richtung von **P** parallel sind, und bringt in den Punkten **A** und **B** zwei Kräfte an, welche jenen Komponenten P_1 und P_2 gleich und entgegengesetzt sind; so würde hierdurch das System im

Gleichgewichte erhalten werden, wenn sich durch die auf das System angebrachten Kräfte nicht innere Pressungen erzeugten, welche



gegen die Richtung von **P** geneigt wären und ihre Wirkungen auf die Punkte **A** und **B** überträgen. In den meisten Fällen wird sich dieser Umstand ereignen; aber es leuchtet ein, daß sich je zwei jener inneren Pressungen, welche in Ein und demselben gemeinschaftlichen Berührungspunkte irgend zweier Körper des Systemes auftreten, gegenseitig vernichten, und daß die Seitenpressungen, welche sich auf die festen Punkte **A** und **B** übertragen, in der geraden Linie **AB** liegen und einander gleich und entgegengesetzt sein müssen, sodaß auch ihre Resultante gleich null sein wird. Das Letztere ergibt sich auch leicht aus den im ersten Abschnitte dieses Werkes aufgestellten statischen Prinzipien, wenn man die auf **A** und **B** sich übertragenden Seitenpressungen mit Q_1 und Q_2 bezeichnet, und bedenkt, daß zwei diesen gleiche und entgegengesetzte Kräfte, mit den Kräften P_1 und P_2 zusammengenommen, der allgemeinen Resultante **P** das Gleichgewicht halten müssen.

Vollendet man resp. über den Kräften P_1, Q_1 und P_2, Q_2 die Parallelogramme $P_1\,Q_1$ und $P_2\,Q_2$; so werden die Diagonalen $R_1\,A$ und $R_2\,A$ resp. die Kräfte R_1 und R_2 in Größe und Richtung darstellen, welche, in den Punkten **A** und **B** angebracht, dem Systeme das Gleichgewicht halten können. Wären nun die beiden festen Punkten fähig, in den Richtungen dieser

Kräfte R_1 und R_2 Widerstand zu leisten; so würden sie auch im Stande sein, das Gleichgewicht des Systemes aufrecht zu erhalten. Bei der Untersuchung der verschiedenen Systeme zeigt es sich aber, daß sich in den meisten Fällen behuf vollständiger Bestimmung jener inneren Pressungen und demnach zur Bestimmung der Seitenkräfte Q_1 und Q_2 keine hinreichende Anzahl von Bedingungen darbieten, und daß demnach diese Pressungen und Kräfte zwischen gewissen Gränzen beliebig variiren können, so jedoch, daß wenn man die Pressungen zwischen gewissen Körpern des Systemes als gegeben annähme, auch die Seitenkräfte Q_1 und Q_2 gegeben sein würden, und umgekehrt, wenn man den Kräften Q_1 und Q_2 bestimmte Werthe gäbe, auch die Pressungen in den übrigen Theilen eine bestimmte Größe annehmen würden. Zuweilen sind für die Werthe von Q_1 und Q_2 gewisse Gränzen gegeben, welche sie durchaus nicht überschreiten dürfen. Dies tritt ein, wenn der Eine oder der andere der beiden Punkte, z. B. der Punkt A, nicht fähig wäre, in einer Richtung Widerstand zu leisten, welche mit der Richtung PC einen kleineren Winkel, als R_1 DC einschlösse: in diesem Falle würden die Seitenkräfte Q_1 und Q_2 nicht kleiner sein dürfen, als die durch Q_1 A und Q_2 B dargestellten; jedoch könnten sie unbeschadet des Gleichgewichtes einen jeden beliebigen größeren Werth, z. B. den Werth $q_1 A = q_1$ und $q_2 B = q_2$ annehmen, wofern nur $q_1 = q_2$ wäre. Die festen Punkte würden alsdann in den Richtungen r_1 A und r_2 B mit den Kräften $r_1 A = r_1$ und $r_2 B = r_2$ Widerstand leisten, von denen die ersteren mit PC einen Winkel $r_1 d C > R_1 DC$ einschlösse.

Das oben angekündigte Prinzip des kleinsten Widerstandes fordert nun, daß jene Seitenkräfte Q_1 und Q_2 von allen denen, welche nach der Natur des gegebenen Systemes und der Widerstandsfähigkeit der Punkte A und B zulässig sind, die **kleinsten** seien, oder was Dasselbe ist, daß sich die Richtungen R_1 D und R_2 D der Widerstände der festen Punkte A und B am wenigsten weit von der Richtung PC der Resultante aller auf das System angebrachten Kräfte entfernen.

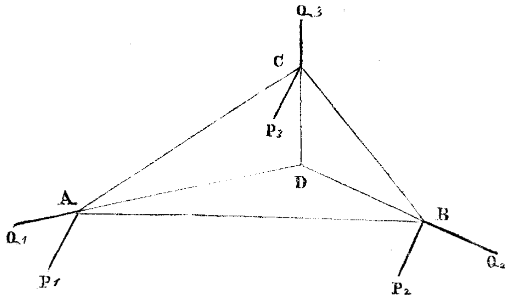
Um diesen Satz zu erweisen, so leuchtet ein, daß wenn irgend ein System von absolut unpreßbaren Körpern mit verschiedenen widerstehenden Punkten nebst den auf dasselbe angebrachten Kräften gegeben ist, die Zerlegung und Übertragung dieser Kräfte auf die festen Stützpunkte in einer Weise vor sich geht, welche einzig und allein von der äußeren Form und Oberflächenbeschaffenheit der Körper und widerstehenden Punkte und durchaus nicht von der Fähigkeit derselben abhängt, in einer Richtung, in welcher sie nothwendig Widerstand leisten müssen, möglicherweise auch noch einen größeren Widerstand darzubieten, wenn Solches etwa erforderlich sein sollte, sodaß, wenn zwei Systeme hergestellt würden, welche der äußeren Form und Oberflächenbeschaffenheit nach und auch hinsichtlich der darauf angebrachten Kräfte ganz identisch wären, die Zerlegung und Fortpflanzung dieser Kräfte bei dem Einen, wie bei dem anderen, ganz in derselben Weise vor sich gehen würde, gleichviel, ob die Körper und widerstehenden Punkte des Einen fähig wären, in den betreffenden Richtungen noch größere Druckkräfte zu ertragen, als die des anderen, und wenn das Eine dieser beiden Systeme, dessen Körper und widerstehenden Punkte die schwächste Widerstandsfähigkeit besäßen, im Stande wäre, die sich erzeugenden Pressungen zu ertragen, auch das andere System diese Pressungen ertragen und in ganz derselben Weise und Intensität empfangen würde. Beispielsweise könnte man sich denken, Ein und dasselbe System von Körpern würde bei **A** und **B** Ein Mal gegen eine Holzmasse und ein anderes Mal gegen eine Eisenmasse gestützt. Setzt man voraus, der Einfluß der R e i b u n g bliebe sich für die Holz- und Eisenmasse gleich oder der Reibungskoeffizient sei für beide derselbe und beide Massen seien unpreßbar; so wäre es absurd, anzunehmen, daß das Eisen, weil es eine größere Kohäsionskraft besitzt, als das Holz, in einer anderen Weise den Druck bei **A** und **B** empfinge, als das Holz, und etwa in den Richtungen r_1 **A** und r_2 **B** Widerstand leisten müßte, während das Holz nur in den Richtungen $\mathbf{R}_1$ **A** und $\mathbf{R}_2$ **A** Widerstand zu leisten brauchte.

Nimmt man nun an, $Q_1 = Q_2$ seien die kleinsten Seitenkräfte, mit welchen die festen Punkte **A** und **B** in der Richtung **AB** unter den gegebenen Bedingungen des Systemes Widerstand leisten müßten; die Zerlegung und Fortpflanzung der auf das System angebrachten Kräfte ginge aber in der Art vor sich, daß jene Punkte in derselben Richtung mit den Kräften $q_1 = q_2$, welche größer, als Q_1, sind, Widerstand leisten müßten: so denke man sich statt der festen Punkte A und B die festen Stäbe P_1 A und P_2 B, welche fähig wären, die Druckkräfte P_1 und P_2 zu ertragen, und außerdem in der Richtung der Linie AB entweder die beiden festen Stäbe q_1 A und q_2 B oder auch den einzigen Stab AB angebracht, welche resp. fähig wären einen Druck oder eine Spannung $= q_1$ zu ertragen. Das System würde alsdann im Gleichgewichte sein. Substituirte man nun aber statt des Stabes AB einen anderen, welcher nur fähig wäre, eine Spannung $Q_1 < q_1$ zu ertragen; so würde derselbe, weil diese Substitution keinen Einfluß auf die Zerlegung und Fortpflanzung der Kräfte des Systemes haben kann, zerreißen und nicht im Stande sein, das Gleichgewicht zu erhalten. Hierin liegt aber offenbar eine Ungereimtheit; denn entfernte man den Stab AB und brächte statt desselben in den Punkten A und B und in den Richtungen Q_1 A und Q_2 B zwei äußere Kräfte $Q_1 = Q_2$ an; so würden dieselben das System nach den statischen Prinzipien im Gleichgewichte erhalten. Da nun endlich irgend eine Kraft aus einem Systeme genommen werden kann, wenn dafür ein fester Punkt substituirt wird, welcher im Stande ist, in der Richtung dieser Kraft mit der Stärke dieser Kraft Widerstand zu leisten; so wird man für die beiden Kräfte Q_1 auch wieder den schwächeren Stab AB einführen können, ohne daß das Gleichgewicht des Systemes aufhört zu bestehen, und es folgt, weil die Zerlegung der Kräfte bei dem stärkeren Stabe AB nicht in einer anderen Weise erfolgen kann, als bei dem schwächeren, daß dieselbe so vor sich geht, daß sich in den Punkten A und B die schwächsten Seitenpressungen Q_1 erzeugen, welche den Bedingungen des Systemes überhaupt entsprechen.

Was in dem Vorstehenden von absolut unpreßbaren Körpern gesagt ist, gilt auch für elastische Körper, welche sich unter der Wirkung von Kräften bis zu einem der Stärke dieser Kräfte entsprechenden Grade zusammendrücken oder ausdehnen lassen. Denn wenn auch durch einen verschiedenen Grad der Elastizität der Körper und widerstehenden Punkte eines Systemes die entstehenden Pressungen aus dem Grunde verschieden ausfallen werden, weil sich in Folge der Zusammendrückung oder Ausdehnung dieser Körper ihre äußeren Formen und mithin die ganze Form des

Systemes ändert; so sind dieselben doch in dem Augenblicke der größten Zusammendrückung oder Ausdehnung oder in dem Zustande des eingetretenen Gleichgewichtes in der hier in Betracht kommenden Beziehung den unpreßbaren Körpern ganz gleich, und es läßt sich in diesem Zustande dasselbe Schlußverfahren darauf anwenden, wie auf die unpreßbaren Körper.

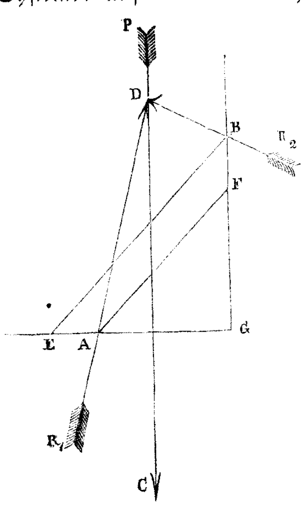
Es ist leicht, die Richtigkeit des obigen Prinzipes auch für den Fall nachzuweisen, daß in dem Systeme drei feste Punkte **A, B** und **C** vorhanden sind. Denn wenn man einen jeden der



Widerstände R_1, R_2, R_3, welche sich in den Punkten A, B, C äußern, in zwei Kräfte P_1 und Q_1, P_2 und Q_2, P_3 und Q_3 zerlegt, von denen die ersteren der Richtung der Resultante P aller auf das System angebrachten äußeren Kräfte parallel sind, und die zweiten in der Ebene **ABC** der drei festen Punkte liegen; so leuchtet zuvörderst ein, daß die zu P parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3 der Resultante P das Gleichgewicht halten müssen, und demnach erhalten werden, wenn man jene Resultante nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente auf die drei Punkte **A, B, C** zerlegt, und daß außerdem die drei in Einer Ebene liegenden Kräfte Q_1, Q_2, Q_3 für sich im Gleichgewichte sein müssen. Dies geht daraus hervor, daß P nicht allein die Resultante aller äußeren Kräfte des Systemes, sondern die allgemeine Resultante der äußeren Kräfte nebst allen inneren Pressungen, die sich zwischen den Körpern erzeugen, mit Ausnahme der Widerstände bei **A, B** und **C**, ist, indem sich von den inneren Pressungen immer je zwei gegenseitig vernichten. Demnach muß die Kraft P mit den drei Widerständen R_1, R_2, R_3 oder mit deren sechs Komponenten im Gleichgewichte sein. Wäre nun nicht ein jedes der beiden Systeme P, P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 für sich im Gleichgewichte, sondern hätte das erstere eine Resultante, welche nothwendig parallel zu P wäre, oder hätte das letztere eine Resultante, welche nothwendig in der Ebene ABC läge, oder hätte ein jedes dieser beiden Systeme eine Resultante; so würden auch beide Systeme eine solche haben, weil die Richtung von P nicht in der Ebene ABC liegt, und das ganze gegebene System könnte nicht im Gleichgewichte sein.

Nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes müssen nun die Seitenpressungen Q_1, Q_2, Q_3 von allen denen, welche den Bedingungen des Systemes entsprechen die kleinsten sein, und man begreift Dies leicht, wenn man sich die Richtungen dieser drei Kräfte bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte D (den sie nothwendig haben müssen, weil sie unter sich im Gleichgewichte sind) verlängert und dann durch die festen Stäbe DA, DB, DC ersetzt denkt, auf welche sich alsdann ein ähnliches Raisonnement, wie das vorhin bei zwei festen Punkten geführte, anwenden läßt.

Wenn in dem Systeme vier oder noch mehr feste Punkte gegeben sind; so läßt sich die Richtigkeit des obigen Prinzipes auf eine ganz ähnliche Weise darthun: übrigens wird die Aufgabe alsdann unbestimmt, weil die Resultante P der Kräfte des Systemes auf vier oder noch mehr Punkte vertheilt werden muß, und es zur Bestimmung der Komponenten P_1, P_2, P_3, P_4 . . ., deren Richtungen der Resultante P parallel sind, nur drei von einander verschiedene Gleichungen geben wird.



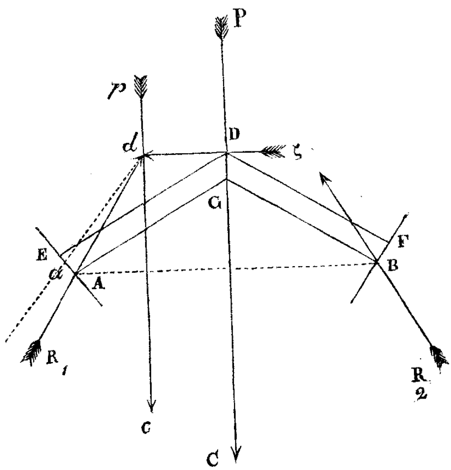
Um einige Anwendungen dieses Prinzipes zu zeigen, so betrachte man das System eines einzigen schweren Körpers von der Form AB, welcher sich mit den Endflächen EA und FB gegen die festen Ebenen EG und BG stützt. Diese Ebenen seien von der Beschaffenheit, daß sie nur in einer Richtung Widerstand leisten können, welche sich gegen das

Perpendikel auf denselben unter keinem größeren, als dem entsprechenden Reibungswinkel für die Berührung mit den Endflächen EA und FB des gegebenen Körpers neigt. Die Reibungswinkel für die Ebenen EG und BG seien resp. φ_1 und φ_2.

Zieht man durch den Schwerpunkt des Körpers AB die Vertikale PC; so ist Dies die Richtung der Resultante P der auf das System angebrachten Kräfte, und die Größe derselben wird durch das Gewicht des Körpers dargestellt. Die Widerstände R_1 und R_2 der Ebenen EG und BG können sich nun in einem jeden Punkte der Flächen EA und FB äußern, und ihre Richtungen können in einer jeden Linie liegen, welche sich gegen die entsprechenden Perpendikel unter einem kleineren, als dem zugehörigen Reibungswinkel, oder unter diesem Winkel selbst neigen. Die Bedingungen für das Gleichgewicht der drei Kräfte P, R_1 und R_2 erfordern nur, daß sich die Richtungen derselben in Einem Punkte D der Linie PC schneiden. Nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes werden sich aber die Richtungen von R_1 und R_2 so wenig wie möglich von der Richtung der Resultante P entfernen. Diesem Prinzipe wird demnach ein Genüge geleistet, wenn sich die Richtung von R_1 dem Perpendikel auf der horizontalen Ebene EG möglichst nähert und die Richtung von R_2 sich von dem Perpendikel auf der vertikalen Ebene BG möglichst entfernt. Da sich die letztere Richtung nicht weiter als bis zum Schenkel des Reibungswinkels φ_2 von dem Perpendikel auf BG entfernen kann; so folgt, daß sich der Widerstand R_2 in einer Richtung äußern wird, welche mit dem Perpendikel auf BG den Winkel φ_2 einschließt. Hierdurch ist die Richtung von R_2 vollkommen bestimmt; die Richtung von R_1 bleibt aber noch in einem gewissen Grade davon abhängig, durch welchen Punkt der Fläche BF der Widerstand R_2 und durch welchen Punkt der Fläche EA der Widerstand R_1 wirkt. Man erkennt leicht, daß die größte Annäherung der Richtung von R_1 an die Richtung der Vertikalen PC erreicht wird, wenn der Widerstand R_2 durch den höchsten Punkt B und der Widerstand R_1 durch den der Linie PC zunächst liegenden Punkt A wirkt. Durch diese Erörterung sind die Richtungen von R_1 und R_2 vollkommen bestimmt, und man erhält ihre Größen, wenn man das Gewicht P nach dem Prinzipe des Parallelogrammes der Kräfte in die Richtungen **DA** und **DB** zerlegt.

Dieser Fall entspricht dem Systeme aus §. 308, wo der Dachsparren den Körper **AB** vertritt, und dem Systeme aus §. 329, wo das Erdprisma vom größten Drucke an der Stelle des Körpers **AB** steht.

Wäre das symmetrische System der beiden Körper **AD** und



BD gegeben, welche sich mit ihren Endflächen gegen die festen Ebenen **AE** und **BF** und bei **D** gegeneinander stützen; so werden sich die Widerstände R_1 und R_2 so steil wie möglich stellen. Zur näheren Bestimmung derselben bemerke man jedoch, daß sich in der gemeinschaftlichen Berührungsfläche **GD** eine innere Pressung äußert, deren Richtung nothwendig horizontal sein muß (s. die Note zu §. 304). Hiernach kann man den Körper **AD** als ein System für sich betrachten, auf welches äußerlich die Gewichte seiner Massentheile, deren Resultante pc sei, angebracht sind, und welcher sich bei **A** und **D** gegen die festen Ebenen **EA** und **DG** stützt, von denen die letztere jedoch nur in horizontaler Richtung Dd Widerstand zu leisten vermag.

Man findet leicht, daß nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes die Richtung des zweiten Widerstandes R_1 der Ebene

AE dann der vertikalen Richtung pc am nächsten kommen wird, wenn der horizontale Widerstand r_2 durch den höchsten Punkt D und der Widerstand R_1 durch den Punkt A wirkt. Es wird hierbei vorausgesetzt, daß die Ebene EA in dieser Richtung Ad Widerstand zu leisten vermag. Überschritte die Neigung derselben jedoch die Gränzen des Reibungswinkels; so würde die Richtung des Widerstandes R_1 durch denjenigen Punkt a der Fläche AE gehen, von welchen eine nach dem Punkte d gezogene Linie ad mit dem Perpendikel auf AE den entsprechenden Reibungswinkel einschlösse. Fiele ein so gewählter Punkt der Ebene AE über die Grundfläche AE hinaus; so würde das gegebene System auf keine Weise im Gleichgewichte zu erhalten sein. Statt daß der widerstehende Punkt der Fläche AE von A weiter nach E rückte, wenn es erforderlich wäre, die Richtung des Widerstandes R_1 dem Perpendikel auf AE mehr zu nähern, könnte man auch den widerstehenden Punkt der Fläche DG weiter nach G herunter rücken, und indem man die Richtung von R_1 unter dem Reibungswinkel durch den Punkt A gehen ließe, und alsdann von dem Durchschnittspunkte dieser Richtung mit der Vertikalen pc eine Horizontale bis zum Durchschnitte mit DG zöge, oder man könnte auch den widerstehenden Punkt A etwas nach E zu rücken, sodaß der widerstehende Punkt bei DG zwischen D und G fiele. Um diese scheinbare Unbestimmtheit für den Fall, daß die Ebene AE in der Richtung Ad keinen Widerstand zu leisten vermöchte, zu beseitigen, so bemerke man, daß in dem ganzen Systeme ADB der horizontale Schub bei D gleich der horizontalen Seitenkraft von R_1 und R_2 ist, und daß, weil diese Letztere nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes für das ganze System ADB ein Minimum sein muß, auch der horizontale Schub bei DG ein solches sein muß. Nimmt man daher zwischen A und E einen beliebigen Punkt a, legt durch denselben eine Linie unter der Richtung des Reibungswinkels, zieht durch den Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Vertikalen pc eine Horizontale und drückt die Bedingung analytisch aus, daß sich die Kräfte R_1, p und r_2 im Gleichgewichte erhalten müssen, indem man das Moment von p in Beziehung zum Punkte a gleich dem Momente von r_2 in Beziehung zu demselben Punkte setzt; so wird es sich sogleich zeigen, welchen Punkt der Fläche

AE man zu wählen habe, damit der in der horizontalen Richtung wirkende Widerstand der Ebene DG so klein als möglich sei.

Zu dem im Vorstehenden untersuchten Falle gehört auch das System des scheitrechten Sturzes aus §. 310, wenn man sich denselben als aus zwei gleichen Theilen zusammengesetzt denkt, welche sich in der Mitte berühren. *)

---

*) Das obige Prinzip des kleinsten Widerstandes, welches der Verfasser dieses Werkes zuerst in dem **Philosophical Magazine** für Oktober 1833 publizirt hat, ist von demselben in dem englischen Originale des vorliegenden Werkes unter folgender Form mitgetheilt: „Wenn ein System von Kräften im Gleichgewichte ist, und es befinden sich hierunter eine Anzahl von Widerständen; so ist ein jeder der Letzteren mit Berücksichtigung der Bedingungen, welchen das ganze System unterworfen ist, ein Minimum."

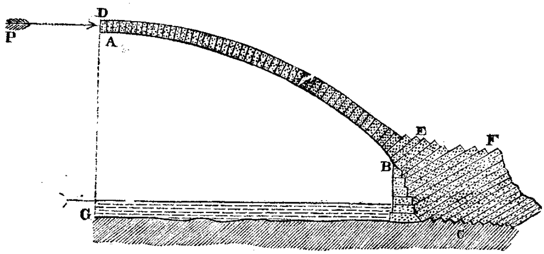
Hierfür findet sich nachstehender Beweis gegeben: »Die Kräfte des Systemes, welche keine Widerstände sind, seien durch **A** und die Widerstände durch **B** dargestellt; ferner sei **C** ein anderes System von Kräften, welches die Widerstände **B** ersetzen und die Kräfte **A** im Gleichgewichte erhalten kann.

Man nehme an, das System **B** werde durch **C** ersetzt; alsdann leuchtet ein, daß eine jede Kraft des Systemes **C** gleich der Kraft ist, welche von den Kräften des Systemes **A** auf ihren Angriffspunkt fortgepflanzt wird, oder gleich dieser Kraft sammt der Kraft, welche von den übrigen Kräften des Systemes **C** auf ihren Angriffspunkt fortgepflanzt wird. Im ersteren Falle ist die erwähnte Kraft mit Einem der Widerstände des Systemes **B** identisch; im zweiten ist sie größer, als derselbe. Hieraus folgt, daß eine jede Kraft des Systemes **B** unter den Bedingungen, welchen das ganze System unterworfen ist, ein Minimum ist.«

Zuvörderst könnte man gegen diese Darstellung des fraglichen Prinzipes einwenden, daß die Widerstände der festen Punkte selbst eigentlich keine Minima sind, sondern, streng genommen, nur die vorhin mit Q_1, Q_2 bezeichneten Seitenkräfte jener Widerstände R_1, R_2, welche man erhält, wenn man die Letzteren in zwei Kräfte $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$ zerlegt, von denen die ersteren der Richtung der allgemeinen Resultante **P** des Systemes parallel sind und die letzteren in der Verbindungslinie oder Verbindungsebene der widerstehenden Punkte liegen und ein Bestreben äußern, die Richtungen der Widerstände $R_1, R_2, \ldots$ von der parallelen Richtung zu **P** abzulenken oder in einer gegen die Richtung von **P** geneigten Linie **AB** (s. die Figur Pag. 86) Druck oder Spannung zu erzeugen. Ein absolutes Minimum wäre der Widerstand R_2 z. B. selbst dann nicht einmal, wenn $Q_2 = o$ und $R_2 = P_2$ würde, weil ein Widerstand, welcher perpendikular zu **AB** im Punkte **B** angebracht würde, immer noch kleiner sein könnte, als jeder andere Widerstand, welcher gegen **AB** eine schiefe Richtung hat. Denn nimmt man die Momente der Kräfte **P** und irgend eines durch den Punkt **B** wirkenden Widerstandes in Beziehung zum Punkte **A**; so wird man finden, daß die perpendikulare Richtung zu **AB** immer einen geringeren Widerstand bei **B** bedingt, als jede andere Richtung. Gleichzeitig würde sich zwar der Widerstand des Punktes **A** vergrößern und von seinem absoluten Minimum weiter entfernen, wenn man den Widerstand P_2, statt in der Richtung $P_2 B$, in einer der perpendikularen Richtung zu **AB** näher liegenden annähme; indessen sieht man doch, daß sich der Widerstand des Punktes **B** seinem absoluten Minimum mehr nähern würde, wenn sich auch der des Punktes **A** weiter daran entfernte. Da ein solches Bestreben in der That nicht stattfindet, weil die perpendikulare Richtung

§. 335. Von allen horizontalen Pressungen, welche an dem obersten Wölbsteine eines Halbbogens angebracht werden können, und welche sowol hinsichtlich ihrer Beträge, wie ihrer Angriffspunkte verschieden sind, welche aber sämmtlich den Gleichgewichtsbedingungen des Halbbogens ein Genüge leisten, ist diejenige die kleinste, welche jener oberste Wölbstein durch den Druck eines entgegengesetzten gleichen Halbbogens empfangen würde.

Zuvörderst leuchtet ein, daß der Druck zwischen der vertikalen Fuge **AD** eines ganzen Gewölbbogens, von welchem die



Figur die Eine Hälfte darstellt, durchaus horizontal sein muß. Man kann hierfür einen ganz ähnlichen Beweis führen, wie

---

des Widerstandes R_2 zu **AB** immer doch irgend eine Spannung in der Richtung **AB** hervorrufen würde, während diese Spannung nur dann gänzlich verschwinden würde, wenn die Widerstände zu **P** parallel wären; so kann man eigentlich nicht sagen, daß die Widerstände selbst, sondern die Seitenkräfte Q ein absolutes Minimum zu erreichen streben, es sei denn, daß man die zu **P** parallelen Komponenten P_1 und P_2 als die absoluten Minima der Widerstände **R** ansähe.

Daß es überhaupt nicht darauf ankommen kann, die Widerstände R_1 und R_2 selbst, sondern nur deren Seitenkräfte Q_1 und Q_2 auf ihre möglich kleinsten Werthe zu bringen, geht schon aus der Betrachtung hervor, daß das System der drei Kräfte R_1, R_2 und **P** unter allen Umständen im Gleichgewichte sein muß. Zerlegt man nun R_1 und R_2 resp. in den Komponenten P_1, Q_1 und P_2, Q_2, von denen die ersteren zu der Richtung der allgemeinen Resultante **P** parallel sind und die letzteren in der Linie **AB** liegen; so begreift man, daß die drei Kräfte P, P_1, P_2, und die beiden Kräfte Q_1, Q_2 für sich im Gleichgewichte sein müssen. Denn hätten z. B. die ersten drei parallelen Kräfte eine Resultante, welche nothwendig der Richtung von **P** parallel sein müßte, oder hätten die letzten beiden Kräfte eine Resultante, welche nothwendig in der Linie **AB** liegen müßte, oder hätten sowol die ersten drei, wie die letzten beiden Kräfte eine Resultante; so würde auch das System der fünf Kräfte P, P_1, P_2, Q_1, Q_2, oder das System P, R_1, R_2 eine Resultante haben, und könnte demnach nicht im Gleichgewichte sein. Hieraus folgt nun, daß die Komponenten P_1, P_2 der

Dies in der Note zu §. 304 für den Fall zweier gleicher Dachsparren geschehen ist. Stellt nun **BE** die Oberfläche der Widerlage dar, gegen welche sich der Bogen stützt, und ist **R** der Widerstand, welchen die Widerlage auf einer jeden Seite des ganzen Bogens leistet, und zerlegt man diese Kraft **R** in ihre vertikale und horizontale Komponente; so wird die erstere gleich dem halben Gewichte des ganzen Bogens oder gleich dem Gewichte eines Halbbogens sein; die letztere aber muß nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes von allen denen die kleinste sein, welche überhaupt unter den Gleichgewichtsbedingungen des gegebenen Systemes zulässig sind.

Betrachtet man nun einen Halbbogen **AE** allein; so müssen sich an demselben folgende drei Kräfte im Gleichgewichte erhalten: das Gewicht des Halbbogens, der horizontale Druck bei **AD** und der Widerstand **R** der Widerlage **BE**. Für diesen letzteren Widerstand kann man seine vertikale und horizontale Komponente substituiren. Geschieht Dies; so ist die vertikale Komponente von **R** gleich dem vertikalen Gewichte des Halbbogens, und es folgt, daß die horizontale Komponente dem horizontalen Drucke bei **AD** gleich sein müsse. Da nun aber die

---

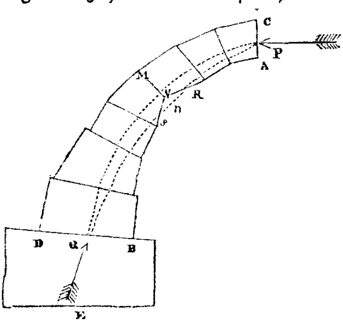
Widerstände R_1, R_2 unter allen Umständen konstant sind und erhalten werden, wenn man die Resultante **P** nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente in parallelen Richtungen auf die Punkte **A** und **B** zerlegt. Die anderen Komponenten Q_1, Q_2 jener Widerstände können aber beliebig variiren, und sind nur der Bedingung, daß sie stets einander gleich seien, und außerdem den Bedingungen des gegebenen Körpersystemes unterworfen. Aber auch hierdurch sind sie noch nicht vollkommen bestimmt, und erst durch das Prinzip des geringsten Widerstandes werden sie an die entscheidende Bedingung gebunden, daß sie von allen möglichen die kleinsten seien.

Außerdem erkennt man bei genauerer Prüfung, daß der Beweis des Verfassers für das in Rede stehende Prinzip unzulänglich ist. Die zweiten Kräfte nämlich, welche sich bei der Substitution des Systemes **C** für das System **B** noch mit auf die Angriffspunkte der Kräfte des ersteren Systemes fortpflanzen sollen, um daselbst stärkere Pressungen zu erzeugen, als wenn das System **B** allein gesetzt wäre, können auch ebenso gut als negativ oder von der Art gedacht werden, daß ihre Wirkung die früheren Pressungen nicht vermehrt, sondern vermindert. Für das System **B** der Widerstände r_1 und r_2 oder der vier Kräfte P_1, q_1, P_2, q_2 (s. die Figur Pag. 86) könnte man z. B. (als System **C**) jene vier Kräfte selbst und außerdem noch in den entgegengesetzten Richtungen von q_1 und q_2 zwei gleiche Kräfte $q_1 - Q_1$ und $q_2 - Q_2$ substituiren; hierdurch würden die neuen Widerstände R_1 und R_2 bei **A** und **B**, welche doch gleichfalls im Stande sein können, das System im Gleichgewichte zu erhalten, keine größeren, sondern vielmehr kleinere Werthe, als die früheren, annehmen, und man sieht, daß bei dieser Substitution der Schluß des Verfassers irrig sein würde.

eben erwähnte horizontale Komponente des Widerstandes bei BE ein Minimum sein muß; so sieht man, daß der gegenseitige Druck zweier gleicher Halbbögen in ihrem Scheitel der kleinste von allen denen ist, welche im Stande sind, einen jeden Halbbogen im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 336. Allgemeine Bedingungen für die Stabilität eines Gewölbbogens.

Nimmt man an, auf die Masse ABDC wirken eine beliebige Anzahl von Kräften, unter denen sich auch der Widerstand



oder die Resultante gewisser Widerstände befindet, welche durch die verschiedenen Punkte einer festen Fläche BD geleistet werden; so leuchtet ein, daß man unter diesen Umständen die Kraft P sowol hinsichtlich ihres Betrages, wie ihrer Richtung und ihres Angriffspunktes in AC ohne Störung des Gleichgewichtes variiren lassen könne, wofern nur die Form und Richtung der Mittellinie des Druckes stets die Bedingungen erfülle, welchen das Gleichgewicht des Systemes unterworfen ist.

Diese Bedingungen bestehen nach §. 285 darin, daß die Mittellinie des Druckes die Oberfläche der Masse nirgends, als in dem Punkte P und innerhalb des Raumes BD, durchschneide, und daß der mittlere Druck auf keinen Fugenschnitt MN der Masse oder auf die gemeinschaftliche Berührungsfläche BD der Masse mit der Widerlage eine Neigung besitze, welche mit dem Perpendikel auf jenen Flächen einen größeren Winkel, als den Reibungswinkel, einschließe.

Indem man so die Kraft P variiren läßt, kann das Gleichgewicht aufgehoben werden, erstens, indem der mittlere Druck eine Richtung annimmt, welche die Gränzen der Widerstandsfähigkeit irgend eines Fugenschnittes MN überschreitet, d. h. die Gränzen des Reibungskegels, zweitens, indem der Punkt Q außerhalb der Fläche BD fällt, in welchem Falle dem mittleren Drucke auf jene Fläche kein Widerstand entgegengesetzt werden kann, und drittens, indem die Mittellinie des Widerstandes die Oberfläche der Masse irgend wo zwischen den Endflächen AC und BD durchschneidet.

Nehmen wir jetzt an, die Gränzen der Variation von P, innerhalb welcher die ersten beiden Bedingungen erfüllt werden, seien bekannt, und indem P zwischen jenen Gränzen variire, untersuchen wir, welches die kleinsten und größten Werthe von P sind, für welche noch die dritte Bedingung erfüllt wird.

Die Kraft P wirke durch einen gegebenen Punkt von AC und in einer gegebenen Richtung. Es leuchtet ein, daß wenn dieselbe unter diesen Umständen fortwährend vermindert wird, die Mittellinie des Druckes sich immer mehr und mehr derjenigen Richtung nähern wird, welche sie vollkommen einnehmen würde, wenn man P ganz entfernte.

Setzt man nun voraus, daß wenn P ganz entfernt würde, die Mittellinie des Druckes die Oberfläche der Masse schneiden würde — d. h. vorausgesetzt, daß die Kraft P zum Gleichgewichte wirklich nothwendig sei — so folgt, daß durch fortgesetzte Verminderung dieser Kraft die Richtung und Krümmung der Mittellinie des Druckes so weit geändert werden kann, daß sie die Oberfläche der Masse in irgend einem Punkte berührt.

Und Dies ist die gesuchte Gränze: denn wenn man die Verminderung von P weiter triebe; so würde die Mittellinie des Druckes die Oberfläche der Masse schneiden, und das Gleichgewicht würde aufhören. Hieraus folgt, daß unter den angenommenen Umständen, wo die durch einen gegebenen Punkt und in einer gegebenen Richtung wirkende Kraft P die kleinstmögliche ist, die Mittellinie des Druckes die innere oder äußere Fläche der Masse berührt.

In derselben Weise kann gezeigt werden, daß wenn die Kraft P am größtmöglichen ist, die Mittellinie des Druckes die äußere oder innere Fläche der Masse berührt, jenachdem der kleinste Werth von P eine Berührung an der inneren oder äußeren Fläche bedingt. *)

---

*) Um die letzteren beiden Sätze deutlicher einzusehen, so bemerke man, daß

Hierbei ist angenommen, daß die Richtung und der Angriffspunkt von **P** gegeben sei. Läßt man aber auch diese beiden Elemente variiren; so kann die Berührung der Mittellinie des Druckes mit der Oberfläche der Masse in einer unendlichen Menge von verschiedenen Punkten erzeugt werden, und ein jeder andere Berührungspunkt bedingt einen neuen Werth von **P**. Unter diesen Werthen ist das absolute Maximum und Minimum zu suchen.

Was die Richtung der Kraft **P** betrifft; so hat man schon

---

die Wölbsteine irgend eines Bogens in Folge ihres eigenen Gewichtes und des der Belastung ein Bestreben haben, herabzusinken. Dieses Bestreben wird nun im Allgemeinen entweder für die den Scheitel oder für die den Anfängen zunächst liegenden Bogentheile überwiegend sein, sodaß im ersteren Falle der Scheitel ein stärkeres Bestreben äußert, in der Richtung der darauf angebrachten Kräfte herabzufallen und die unteren Theile des Bogens nach außen zu werfen, während im letzteren Falle die unteren Bogentheile ein stärkeres Bestreben äußern, sich in der Richtung der darauf angebrachten Kräfte herabzubewegen und den Scheitel in die Höhe zu treiben. Hierdurch theilt sich der Halbbogen gewissermaaßen in zwei Theile, von denen der Eine der Wirkung der Schwere zu folgen und den anderen Theil in entgegengesetzter Richtung dieser Kraft zu bewegen strebt. Um nun denjenigen Theil, welcher zu fallen strebt, durch die möglich kleinste horizontale Kraft aufrecht zu erhalten; so leuchtet aus den Untersuchungen des §. 334 ein, daß die Mittellinie des Druckes in diesem Theile eine der vertikalen Richtung möglichst nahe kommende Lage haben muß. Diese Bedingung wird aber offenbar unter übrigens gleichen Umständen dadurch erfüllt, daß die Mittellinie des Druckes resp. die innere oder äußere Wölbungslinie berührt, jenachdem der Scheitel oder die Bogenanfänge das vorwaltende Bestreben, herabzufallen, besitzen.

Um ferner bei einem gegebenen Gewölbe zu bewirken, daß der zum Herabsinken stärker geneigte Theil gehoben würde, oder daß die Berührung der Mittellinie des Druckes auf die entgegengesetzte Wölbungslinie übertragen würde, müßte nothwendig an jenem Theile ein vermehrter horizontaler Schub angebracht werden. Wenn also das absolute Minimum des horizontalen Schubes **P** einer Berührung der Mittellinie des Druckes an der inneren Wölbungslinie entspricht; so gehört das Maximum dieses Schubes einer Berührung an der äußeren Wölbungslinie an, und umgekehrt.

Nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes hat man das absolute Minimum der Kraft **P** zu ermitteln, und demnach zu untersuchen, ob das Minimum von alle den horizontalen Kräften **P**, welche einer Berührung der Mittellinie des Druckes mit der Einen Wölbungslinie angehören, kleiner ist, als das Minimum von alle den horizontalen Kräften, welche einer Berührung mit der anderen Wölbungslinie entsprechen.

Es könnte sich ereignen, daß die zuletzt erwähnten beiden Minima einander gleich wären. Alsdann würden sowenig die oberen, wie die unteren Bogentheile ein vorherrschendes Bestreben haben, herabzufallen, und die wahre Mittellinie des Druckes würde ganz in der Masse des Gewölbbogens liegen, ohne die Eine oder die andere Wölbungslinie zu berühren. Dieser Umstand kann iedoch nur dann eintreten, wenn entweder die Form des Bogens oder die Art der Belastung in einer ganz besonderen Weise gewählt ist; im Allgemeinen wird bei einem gegebenen Gewölbe immer der Eine oder der andere der beiden obigen Fälle eintreten. —

in §. 335 gesehen, daß dieselbe für den Fall, daß die gegebne Masse einen vollständigen Halbbogen bildet, nothwendig horizontal sein muß. Aus diesem Grunde wird die Richtung der Kraft **P** bei den nachfolgenden Untersuchungen auch dann immer als eine horizontale angenommen, wenn man nur den unteren Theil eines solchen Bogens betrachtet, da ja doch schließlich die Resultate auf den Fall eines vollständigen Holbbogens übertragen werden. *)

Endlich bleiben also nur zwei Bedingungen übrig, welchen die Kraft **P** unterworfen ist und welche ihr Minimum bestimmen. Die erste ist, daß der Betrag jener Kräfte von der Art sei, daß die Mittellinie des Druckes einen Berührungspunkt mit der inneren oder äußeren Wölbungslinie gemein habe, jenachdem die innere oder äußere Berührung den kleinsten Werth bedingt; die zweite ist, daß der Angriffspunkt jener Kraft im obersten Querschnitte **AC** von der Art sei, daß dieselbe dadurch den kleinsten Werth annehme, welcher sich mit der ersten Bedingung vereinigen läßt.

§. 337. Praktische Bedingungen für die Stabilität eines Gewölbbogens von trocken versetzten Steinen.

Die Bedingung, daß der mittlere Druck am Schlußsteine auch hinsichtlich der Lage seines Angriffspunktes an diesem Steine ein Minimum sein müsse, ist von einer hypothetischen Beschaffenheit der Mauersteine abhängig. Dieselbe setzt ein unpreßbares

---

*) Wollte man übrigens einen solchen unteren Bogentheil unter der besonderen Bedingung betrachten, daß die an seinem oberen Ende angebrachte Kraft gleich der Pressung wäre, welche sich daselbst erzeugen würde, wenn das an einem Halbbogen fehlende Stuck ergänzt würde; so leuchtet ein, daß die Kraft **P** nicht horizontal angenommen werden dürfte, sondern vielmehr von der Beschaffenheit, daß ihre horizontale Komponente gleich jenem horizontalen Schube **P**, welcher sich im Scheitel des ganzen Gewölbes äußert, und ihre vertikale Komponente gleich dem Gewichte des fehlenden Bogenstückes wäre. Eine solche Annahme, welche die Untersuchung nur erschweren würde, hätte indessen gar kein Interesse, da man alle in einem solchen unteren Bogentheile auftretenden Kräfte, wenn es daran gelegen sein sollte, dieselben zu kennen, auch aus den allgemeinen Gleichungen ableiten könnte, welche sich auf einen vollständigen Halbbogen beziehen.

Material der Wölbsteine und ein mathematisches Aneinanderschließen ihrer Oberflächen voraus. Beides findet in der Wirklichkeit bei einem Bogen von trocken versetzten Steinen nicht statt. Beim Herausschlagen der Lehrbögen tritt bei einem jeden Gewölbe eine kleine Bewegung ein; entweder sinkt der Scheitel herab, und indem sich daselbst die Fugen in der unteren Wölbungslinie öffnen, drücken die Steine mit ihren oberen Kanten gegeneinander, sodaß in praktischer Beziehung die Mittellinie des Druckes für Gewölbe von trocken versetzten Steinen die äußere Wölbungslinie im Scheitel berührt, und alsdann nur noch die erste der beiden obigen Bedingungen für das Minimum von P, daß nämlich die Mittellinie des Druckes die innere Wölbungslinie berühre, zu erfüllen bleibt. Oder, wenn die unteren Bogentheile ein stärkeres Bestreben zur Drehung besitzen, als die oberen, was übrigens nur in sehr wenigen Fällen eintritt; so wird der Scheitel gehoben, die Fugen öffnen sich daselbst von außen und die Wölbsteine drücken mit ihren inneren Kanten gegeneinander, sodaß die Mittellinie des Druckes die innere Wölbungslinie im Scheitel berührt, und alsdann ebenfalls nur noch die zweite der obigen Bedingungen zu erfüllen bleibt, daß nämlich die Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie berühre. Würde nun Einer von den eben erwähnten Umständen als wirklich vorhanden vorausgesetzt; so wäre damit die Wirkung der Preßbarkeit der Wölbsteine und Widerlagen aus der Untersuchung eliminirt, wofern man nicht auch auf den Umstand Rücksicht nehmen wollte, daß, streng genommen, die Mittellinie des Druckes durch keine Kante eines Steines gehen oder eine Wölbungslinie genau berühren kann. Denn Dies setzte voraus, daß das Material fähig wäre auf einem unendlich kleinen Theile seiner Oberfläche einen endlichen Druck zu ertragen, ohne nachzugeben. Da Dies in der Wirklichkeit nicht möglich ist; so folgt, daß die Mittellinie des Druckes immer wenigstens so weit von einer jeden Außenfläche einer Konstruktion entfernt bleiben muß, daß die zwischen ihrem Durchschnittspunkte und der äußeren Oberfläche liegende Fugenfläche etwa die Hälfte des mittleren Druckes in dieser Fuge zu ertragen im Stande sei, ohne vollkommen zerdrückt zu werden. Die Berücksichtigung dieses letzteren Umstandes, der übrigens auf die Resultate nur einen sehr geringen Einfluß haben kann, würde zu sehr verwickelten Formeln führen und wird deshalb ganz vernachlässigt werden.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist immer angenommen worden, daß die Form der Konstruktion nebst der Lage der verschiedenen Fugenschnitte gegeben, und die Form und Lage der Mittellinie und Richtungslinie des Druckes gesucht sei. Offenbar könnte auch das Umgekehrte dieser Aufgabe gefordert werden.

Wenn z. B. die Form und Lage der Mittellinie oder Richtungslinie des Druckes und die Lagen der verschiedenen Fugenschnitte gegeben wären; so könnte gefragt werden, welche Form die Oberfläche der Konstruktion haben müßte, um diesen Bedingungen zu genügen.

Oder die Richtung der Mittellinie oder Richtungslinie des Druckes und die Form der Oberfläche der Konstruktion könnten gewissen Bedingungen unterworfen werden, welche sowenig die Eine, wie die andere absolut bestimmten, sondern nur allgemeine Charaktere erkennen ließen.

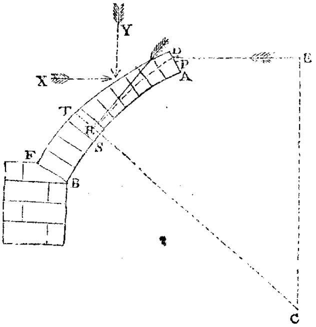
Wenn z. B. die Form der inneren Wölbungslinie eines Bogens gegeben und daneben bestimmt wäre, daß die Fugenschnitte überall perpendikular auf derselben stehen sollten, und daß die Richtungen der mittleren Pressungen immer Ein und denselben Winkel mit den Normalen auf jenen Fugenschnitten einschließen sollten, sodaß das Bestreben dieser Pressungen, einen jeden Wölbstein auf dem anderen fortzuschieben, für alle Steine sich gleich bliebe; so könnte bestimmt werden, welche Form unter diesen Umständen die äußere Wölbungslinie haben müßte.

Wäre jener Winkel überall dem Reibungswinkel gleich; so würde sich der Bogen im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden, indem ein jeder Wölbstein im Begriffe wäre auszugleiten.

Wäre dieser konstante Winkel gleich null; so würde der Bogen sicher stehen, selbst wenn zwischen den Wölbsteinen keine Reibung stattfände. Das Gleichgewicht des Bogens unter dieser einzigen Bedingung bildete lange ausschließlich die Theorie des Gewölbbogens. Es ist unmöglich, sich irgend eine Anordnung der Theile eines Bogens zu denken, durch welche seine Stabilität mehr gesichert würde, als durch die eben erwähnte, insofern nur das Bestreben der Wölbsteine zu gleiten in Betracht gezogen wird; indessen gibt es wahrscheinlich keinen einzigen praktischen Fall, in welchem dieses Bestreben das Gleichgewicht eines Bogens wirklich gefährdet. Der Reibungswinkel ist für alle zur Konstruktion von Gewölben gewöhnlich gebrauchten Steine so groß, daß es vielleicht schwer sein würde, einen Bogen herzustellen, bei welchem der mittlere Druck auf irgend eine Fuge oberhalb des Bogenanfanges jenseit des Reibungswinkels läge, und welcher in Folge des Gleitens irgend eines Wölbsteines zusammenbräche.

Wird die Mittellinie des Druckes bis an die Widerlage verzeichnet; so erhält man den Punkt, in welchem die Richtung des mittleren Druckes die Letztere durchschneidet, und die Richtungslinie des Druckes ergibt die Neigung desselben. Diese Elemente liefern alle Bedingungen für das Gleichgewicht der Widerlagen und demnach der ganzen Konstruktion; sie verbinden sich direkt mit den Bedingen für die Belastung des Bogens und setzen in den Stand, diese Belastung so zu bestimmen, daß dadurch die Berechungspunkte irgend eine verlangte Lage in den Wölbungslinien einnehmen, und daß die Mittellinie des Druckes diejenige Form erhalte, welche die Stabilität der Konstruktion am besten sichert; aus gegebenen Dimensionen und einer gegebenen Belastung des Bogens bestimmen sie die Dimensionen der Widerlagen, oder umgekehrt, aus gegebenen Dimensionen der Widerlagen die Dimensionen und die Belastung des Bogens, welche mit Sicherheit gewählt werden dürfen.

§. 338. Bestimmung der Mittellinie des Druckes für einen Bogen, dessen innere Wölbungslinie ein Kreis und dessen Belastung über zwei gegen den Scheitel symmetrisch gelegene Punkte vertheilt ist.



Wenn **ADBF** einen untern Theil eines solchen Bogens darstellt; so sei

P eine am obersten Steine angebrachte horizontale Kraft,

p der vertikale Abstand der Richtung dieser Kraft vom Mittelpunkte C,

X und Y die horizontale und vertikale Komponente irgend eines von dem Theile DT der äußeren Wölbungslinie zu tragenden Druckes oder der Resultante mehrerer solcher Druckkräfte auf DT,

x und y die Koordinaten des Angriffspunktes dieses Druckes oder dieser Resultante in Beziehung zum Mittelpunkte C für eine vertikale und eine horizontale Koordinatenaxe,

M das Gewicht der Masse ASTD,

h der horizontale Abstand einer durch den Schwerpunkt dieser Masse gehenden Vertikalen von C,

ϑ der Winkel ECS, welchen eine in der Richtung der Fugenschnitte durch C gelegte Ebene CF mit der Vertikalen bildet,

Θ der Werth ECA dieses Winkels für die oberste Fuge,

Ψ der Werth des Winkels ϑ für den Punkt, wo die Mittellinie des Druckes die Wölbungslinie berührt, oder der Bruchwinkel,

r der Halbmesser der inneren Wölbungslinie,

R der der äußeren, wenn diese ebenfalls ein Kreis ist,

ϱ der Vektorradius CR der Mittellinie des Druckes für den Winkel ϑ, und außerdem sei

$$\mathrm{R} = r(1 + \alpha), \text{ sodaß } \alpha = \frac{\mathrm{R} - r}{r} \text{ ist, und}$$

$\lambda r =$ der Linie AP, wenn A den unteren Punkt der obersten Fuge und P den Angriffspunkt der Kraft P in dieser Fuge bezeichnet.

Der Annahme gemäß geht die Resultante aller auf den Theil ASTD angebrachten Kräfte durch den Punkt R der Fuge ST, und diese Kräfte sind das Gewicht M der Masse ASTD, die Belastungen X und Y und die Kraft P. Brächte man daher in dem Punkte R Kräfte an, welche den vorstehenden gleich und entgegengesetzt wären; so würden dieselben den oberen Theil im Gleichgewichte erhalten, und der untere Theil TSBF könnte entfernt werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 8). Es ist aber auch zur Erhaltung des Gleichgewichtes des oberen Theiles nothwendig, daß der untere Theil im Punkte R mit einer Kraft

Widerstand leiste, welche der obigen Resultante gleich und entgegengesetzt ist, oder auch mit Kräften, welche den vier Komponenten M, X, Y, P dieser Resultante einzeln gleich und entgegengesetzt sind. Nimmt man daher die Momente dieser durch den Punkt R wirkenden Widerstände und der auf den Theil ASTD angebrachten Kräfte in Beziehung zum Mittelpunkte C, und beachtet, daß die perpendikularen Abstände der Widerstände $M+Y$ und $P-X$ vom Punkte C resp. $\varrho \sin\vartheta$ und $\varrho \cos\vartheta$ sind; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente $(M+Y) \times \varrho \sin\vartheta + (P-X)\,\varrho \cos\vartheta = Mh + Yy - Xx + Pp$, und hieraus folgt

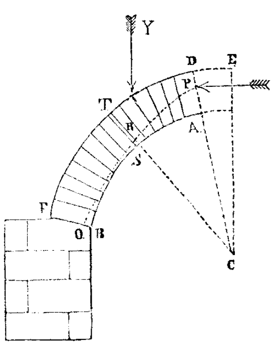
$$\varrho = \frac{Mh + Yy - Xx + Pp}{(M+Y)\sin\vartheta + (P-X)\cos\vartheta}, \dots \quad (458).$$

welches die Gleichung für die Mittellinie des Druckes ist.

M und h sind gegebene Funktionen von ϑ, ebenso wie X und Y, wenn die Belastung von D bis T stetig über die äußere Wölbungslinie vertheilt ist.

Aus dieser Gleichung ist nun der durch den gegenüberliegenden Halbbogen erzeugte horizontale Schub P zu bestimmen. Um die Formeln hinsichtlich der numerischen Ausdrücke für die Kräfte P, X, Y, M möglichst zu vereinfachen und für die Anwendung brauchbar zu machen; so beachte man, daß hier immer das Gleichgewicht eines Bogens betrachtet wird, dessen Masse zwischen zwei parallelen Ebenen liegt, die um Einen Fuß voneinander abstehen. Die Kraft P ist der Schub zweier solcher Halbbögen gegeneinander, M ist das Gewicht irgend eines Theiles ASTD eines solchen Bogens und X und Y die entsprechenden Belastungen, welche das Gewölbe in einer Breite von Einem Fuße zu ertragen hat. Es leuchtet ein, daß die Anzahl der Flächeneinheiten, welche in der Fläche ASTD enthalten sind, als ein Maaß für das Gewicht M angenommen werden kann: denn multiplizirte man diese Anzahl mit dem konstanten Faktor μ, welcher das Gewicht eines Kubikfußes der Gewölbmasse in Pfunden darstellt; so würde man das Gewicht der Masse ASTD in Pfunden erhalten. Damit aber die vier Kräfte M, X, Y, P nach Ein und derselben Einheit gemessen werden, was durchaus nothwendig ist; so sehe man auch die Kraft P als das Gewicht eines Körpers von dem Materiale der Wölbsteine an, dessen Stärke Einen Fuß beträgt; unter dieser Voraussetzung wird die Kraft **P** durch eine gewisse Anzahl derselben Flächeneinheiten gemessen werden, welche den Werthen von **M** oder der Fläche **ASTD** zum Grunde liegen; auch bemerkt man, daß alsdann **P** als das Gewicht einer Säule von dem Materiale der Wölbsteine angesehen werden kann, deren Grundfläche Einen Quadratfuß und deren Höhe ebenso viel laufende Fuß, wie **P** Einheiten, enthält. Wären endlich die Kräfte **X** und **Y** in Pfunden gegeben; so hätte man ihre Werthe zuvor durch den konstanten Faktor μ zu dividiren, damit dieselben ebenfalls dem Gewichte eines Mauerkörpers von Einem Fuß Stärke gleichkommen und durch dieselben Flächeneinheiten gemessen werden, wie die Kräfte **M** und **P**. In den meisten Fällen werden die Kräfte durch den Druck von Übermauerungen erzeugt; alsdann ist $X = o$ und **Y** wird, ebenso wie **M**, durch die Flächeneinheiten des Querprofiles der Übermauerung gemessen. Lägen auf diesen Übermauerungen noch Schichten von anderen Körpern, Erde z. B.; so wäre das Querprofil dieser Körper in dem Verhältnisse ihres spezifischen Gewichtes zu dem des Mauerwerkes zu reduziren und alsdann als zu der Übermauerung gehörig zu betrachten.

Nimmt man hiernach als den einfachsten Fall an, die Wölbsteine seien alle von gleicher Höhe, sodaß die äußere Wölbungslinie ebenfalls ein Kreis ist; so hat man für das Gewicht eines sehr kleinen Massenelementes des Theiles **ASTD**, welches in einem Abstande $= r'$ vom Mittelpunkte **C** liegt, den Ausdruck $dr'.r'd\vartheta$, für den den perpendikularen Abstand einer durch dieses Element gehenden Vertikalen von **C** $r'\sin\vartheta$, und demnach für das Moment jenes elementaren Gewichtes in Beziehung zum Punkte **C** $r'^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, dr'$. Hieraus folgt für das Moment der ganzen Masse **M**



$$Mh = \int_r^R \int_\Theta^\vartheta r'^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr' = \tfrac{1}{3}(R^3 - r^3)(\cos\Theta - \cos\vartheta),$$

ferner hat man:

$$M = \int_r^R \int_\Theta^\vartheta r' \, d\vartheta \, dr' = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)(\vartheta - \Theta).$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (458); so findet man für die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes

$$\varrho \left[\tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)(\vartheta - \Theta)\sin\vartheta + Y\sin\vartheta - X\cos\vartheta + P\cos\vartheta\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}(R^3 - r^3)(\cos\Theta - \cos\vartheta) + Yy - Xx + Pp \;\ldots\ldots\; (459)$$

Der Bruchwinkel.

§. 339. In den Punkten, wo das Gewölbe zusammenbrechen würde, wenn die Kraft P unter ihr Minimum herabsänke, trifft die Mittellinie des Widerstandes entweder die innere oder die äußere Wölbungslinie; für den Fall, daß der Bruch in der Weise zu erfolgen strebt, daß der Scheitel des Gewölbes herabfällt, ein Fall, welcher der gewöhnlichste ist, berührt die Mittellinie des Druckes die innere Wölbungslinie, und man hat für die Brechungspunkte $\varrho = r$. Bezeichnet man nun den entsprechenden Winkel von ϑ mit Ψ; so folgt aus Gleichung (459)

$$r\left[\tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)(\Psi - \Theta)\sin\Psi + Y\sin\Psi - X\cos\Psi + P\cos\Psi\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}(R^3 - r^3)(\cos\Theta - \cos\Psi) + Yy - Xx + Pp \;\ldots\ldots\; (460)$$

In diesen Brechungspunkten berührt aber auch die Mittellinie des Druckes die Wölbungslinie, sodaß für diese Punkte $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta}$ und, da $\frac{dr}{d\vartheta} = o$ ist, $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = o$ sein muß. Nimmt man daher zur Vereinfachung der Resultate an, der Druck der Belastung des Gewölbes sei durchaus vertikal, sodaß $X = o$ ist, und dieselbe sei auf einen einzigen Punkt konzentrirt, sodaß $\frac{dY}{d\vartheta} = o$ ist, und differenzirt die Gleichung (459) in Beziehung zu ϱ und ϑ, dividirt darauf auf beiden Seiten mit $d\vartheta$ und setzt gleichzeitig $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = o, \vartheta = \Psi$ und $\varrho = r$; so kommt

$$r[\tfrac{1}{2}(R^2-r^2)(\Psi-\Theta)\cos\Psi+\tfrac{1}{2}(R^2-r^2)\sin\Psi+Y\cos\Psi-P\sin\Psi]=\tfrac{1}{3}(R^3-r^3)\sin\Psi$$

und hieraus folgt, wenn man $R=r(1+\alpha)$ setzt,

$$\left[\frac{P}{r^2}+\alpha^2(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{2})\right]\mathrm{tang}\,\Psi=\left[\frac{Y}{r^2}-\alpha(\tfrac{1}{2}\alpha+1)\Theta\right]+\alpha(\tfrac{1}{2}\alpha+1)\Psi..(461)$$

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (460 und 461) die Größe $\Psi-\Theta$; so erhält man nach gehöriger Reduktion

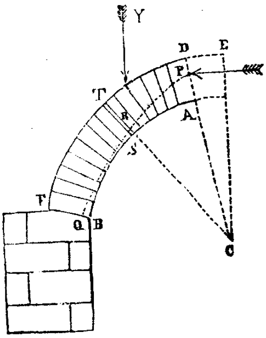
$$\alpha(\tfrac{1}{2}\alpha+1)\cos^2\Psi-\left[\frac{Yy+Pp}{r^3}+\alpha(\tfrac{1}{3}\alpha+{}^2\alpha+1)\cos\Theta\right]\cos\Psi+\left[\frac{P}{r^2}+\alpha^2(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{2})\right]=0$$
$$\ldots\ldots (462)$$

Eliminirt man zwischen denselben Gleichungen (460) und (461) die Größe P und reduzirt gehörig; so ergibt sich

$$\frac{Y}{r^2}\left[\frac{p\cos\Psi+y\sin\Psi}{r}-1\right]=(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)(1-\frac{p}{r}\cos\Psi)(\Psi-\Theta)$$

$$+\frac{p}{r}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{3}\alpha^3\right)\sin\Psi-\left[(\alpha+\alpha^2+\tfrac{1}{3}\alpha^3)\cos\Theta-(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\cos\Psi\right]\sin\Psi$$
$$\ldots\ldots (463).$$

Die vorstehende Gleichung würde man auch erhalten haben, wenn man die Gleichung (459) in Beziehung zu P und ϑ differenzirt und $\frac{dP}{d\vartheta}=o$ gesetzt, gleichzeitig aber auch r und Ψ für ϱ und ϑ substituirt hätte. Denn wenn man jene Gleichung durch $u=o$ darstellt, worin u eine Funktion von P, ϱ und ϑ ist; so hat man $\frac{du}{dP}\cdot\frac{dP}{d\vartheta}+\frac{du}{d\vartheta}=o$ und $\frac{du}{d\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{d\vartheta}+\frac{du}{d\vartheta}=o$. Hieraus folgt, daß dasselbe Resultat $\frac{du}{d\vartheta}=o$ erhalten wird, ob man nun $\frac{dP}{d\vartheta}=o$, oder $\frac{d\varrho}{d\vartheta}=o$ setzt, welche letztere Annahme bei Entwickelung der Gleichung (461), aus der die Gleichung (463) gefolgert wurde, gemacht ist. Die Voraussetzungen $\frac{dP}{d\vartheta}=o, \varrho=r$ bestimmen aber, wie man aus dem Früheren weiß, das Minimum des Druckes P, welcher an dem Schlußsteine angebracht werden muß, um die Drehung der Wölbsteine um irgend eine Kante zu verhindern.



Nun sei der Abstand $AP = \lambda r$, also $\frac{p}{r} = \frac{(r + \lambda r)\cos\Theta}{r} = (1+\lambda)\cos\Theta$. Substituirt man diesen Werth für $\frac{p}{r}$ in die vorstehende Gleichung; so geht dieselbe über in

$$\frac{Y}{r^2}\left[\frac{y}{r}\sin\Psi + (1+\lambda)\Psi\cos\Theta\cos - 1\right] =$$

$$(\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2)\left\{[1-(1+\lambda)\cos\Theta\cos\Psi](\Psi-\Theta) + (\cos\Psi - \cos\Theta)\sin\Psi\right\}$$

$$+ \lambda(\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3)\cos\Theta\sin\Psi \;\ldots.\; (464).$$

Diese Gleichung bestimmt den Bruchwinkel Ψ, wenn der Angriffspunkt P des horizontalen Schubes am Schlußsteine gegeben ist. Dieser Punkt ist zwar im Voraus nicht bekannt, derselbe wird aber weiter unten (§. 344) unter der Bedingung näher ermittelt werden, daß die Kraft P unter allen, welche den Bogen im Gleichgewichte zu erhalten vermögen, die kleinste sei.

Wenn die Wölbungslinie einen stetigen Kreisbogen bildet; so ist die Fuge AD im Scheitel vertikal, CD fällt mit CE zusammen und der Winkel $ECD = \Theta$ wird null: bildet dieselbe jedoch einen gebrochenen Kreisbogen, wie bei den gothischen Gewölben; so ist der Werth des Winkels Θ durch den Charakter des Bogens bestimmt. Bei dem reinen gothischen Bogen hat man $\Theta = 30^{\circ}$.

Setzt behuf Anwendung der obigen Formel auf die gewöhnlichen Tonnengewölbe $\Theta = o$; so ergibt dieselbe nach gehöriger Reduktion, da $\frac{1-\cos\Psi}{\sin\Psi} = \text{tang}\ {}^{\Psi}$ ist,

$$\frac{Y}{r^2}\left[\frac{y}{r}-\left(\tang\frac{\Psi}{2}-\lambda\cot\Psi\right)\right]$$

$$=(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\left[\left(\tang\frac{\Psi}{2}-\lambda\cot\Psi\right)\Psi-(1-\cos\Psi)\right]+\lambda(\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{3}\alpha^3)\;\ldots.(465).$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß wenn in dieser Gleichung Ψ wächst, auch Y wachsen muß und umgekehrt, sodaß in dem Maaße, wie sich die Last vermehrt, die Brechungspunkte tiefer herabsinken. Wenn $Y=o$, oder wenn der Bogen nicht belastet ist; so hat man

$$\left(\tang\frac{\Psi}{2}-\lambda\cot\Psi\right)\Psi-(1-\cos\Psi)+\tfrac{1}{3}\lambda\alpha\frac{3+2\alpha}{2+\alpha}=0\;\ldots.(466)$$

Wenn $y=o$, oder wenn die Belastung nur im Scheitel des Bogens angebracht ist; so erhält man

$$\frac{Y}{r^2}=\frac{(\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2)(1-\cos\Psi)-\lambda(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3)}{\tang\frac{\Psi}{2}-\lambda\cot\Psi}-(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\Psi\;\ldots.(467)$$

Wenn $\frac{y}{r}-\left(\tang\frac{\Psi}{2}-\lambda\cot\Psi\right)=o$ ist; so wird $\frac{Y}{r^2}$ unendlich. Hieraus folgt, daß eine unendlich große Belastung erforderlich ist, um dem Bruchwinkel denjenigen Werth zu geben, welcher durch diese Beziehung bestimmt ist. Lös't man dieselbe für $\tang\frac{\Psi}{2}$ auf, indem man $\cot\Psi=\dfrac{1-\tang^2\frac{\Psi}{2}}{2\tang\frac{\Psi}{2}}$ setzt; so ergibt sich

$$\tang\frac{\Psi}{2}=\frac{\left(\frac{y}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{y}{r}\right)^2+\lambda(2+\lambda)}}{2+\lambda}\;\ldots.(468)$$

Keine in dem horizontalen Abstande y vom Scheitel auf den Bogen gesetzte Last kann bewirken, daß der Bruchwinkel den durch diese Gleichung bestimmten Werth überschreitet, welcher sich auf

$$\tang\frac{\Psi}{2}=\sqrt{\frac{\lambda}{2+\lambda}}$$

reduzirt, sobald $y = o$ oder sobald die Last gerade im Scheitel angebracht ist; man sieht also, daß der Bruchwinkel immer zwischen den durch die Gleichungen (466) und (468) bestimmten Werthen liegen muß. *)

---

*) Wenn der Bogen ein Bestreben hat, in der Weise zu brechen, daß der Scheitel gehoben wird, während die unteren Theile nach innen fallen; so wird die Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie berühren. Schlägt man für diesen Fall einen ganz ähnlichen Gang der Untersuchung, wie im vorstehenden Paragraphe ein, indem man für die Brechungspunkte $\varrho = \mathrm{R}$ und $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{d\mathrm{R}}{d\vartheta} = o$, ferner $r = \mathrm{R}\ (1 - \alpha_1)$ und $\mathrm{DP} = \lambda_1\ \mathrm{R}_1$ also $\frac{p}{\mathrm{R}} = (1 - \lambda_1) \cos\Theta$ setzt; so erhält man statt der Gleichungen (461), (462) und (464) bis (467) resp.

$$\left[\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R^2}} + \alpha_1{}^2 (\tfrac{1}{3}\alpha_1 - \tfrac{1}{2})\right] \mathrm{tang}\, \Psi_1 = \left[\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R^2}} + \alpha_1 (\tfrac{1}{2}\mathrm{L}_1 - 1)\Theta\right] - \alpha_1 (\tfrac{1}{2} - 1) \Psi_1 \ldots (461\,a).$$

$$- \alpha_1\ (\tfrac{1}{2}\ \alpha_1 - 1) \cos^2 \Psi_1 - \left[\frac{\mathrm{Yy} + \mathrm{Pp}}{\mathrm{R^3}} + \alpha\ (\tfrac{1}{3}\,\alpha^2 - \alpha + 1) \cos\Theta\right] \cos \Psi_1$$
$$+ \left[\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{r^2}} + \alpha_1{}^2 (\tfrac{1}{3}\,\alpha_1 - \tfrac{1}{2})\right] = o \ldots .\ (462\,a).$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R^2}} \left[\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{R}} \sin \Psi_1 + (1 - \lambda_1) \cos\Theta \cos \Psi_1 - 1\right]$$
$$= (\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2) \left\{\left[1 - (1 - \lambda_1) \cos\Theta \cos \Psi_1\right] (\Psi_1 - \Theta)\right.$$
$$\left. + (\cos \Psi_1 - \cos\Theta) \sin \Psi_1\right\} + \lambda_1\ (\tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2 - \tfrac{1}{3}\,\alpha_1{}^3) \sin \Psi_1 \cos\Theta, \ldots (464\,a).$$

Die vorstehende ist allgemeine Bestimmungsgleichung für den Bruchwinkel Ψ_1; dieselbe wird für $\Theta = o$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R^2}} \left[\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{R}} - (\mathrm{tang}\,\frac{\Psi_1}{2} + \lambda_1 \cot \Psi_1)\right]$$
$$= (\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha^2) \left[(\mathrm{tang}\,\frac{\Psi_1}{2} + \lambda_1 \cot \Psi_1)\, \Psi_1 - (1 - \cos \Psi_1)\right]$$
$$+ \lambda_1\ (\tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2 - \tfrac{1}{3}\,\alpha_1{}^3)\ \ldots .\ (465\,a).$$

Hieraus folgt für $\mathrm{Y} = o$

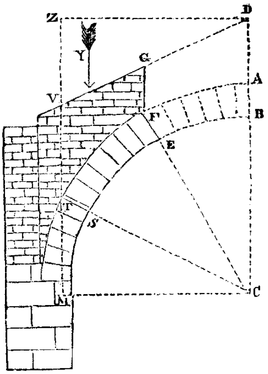
$$\left(\mathrm{tang}\,\frac{\Psi_1}{2} + \lambda_1 \cot \Psi_1\right) \Psi_1 - \left(1 - \cos \Psi_1\right) + \tfrac{1}{3}\lambda_1 \alpha_1 \frac{3 - 2\alpha_1}{2 - \alpha_1} = o \ldots .\ (466\,a).$$

und für $y = o$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R^2}} = \frac{(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2)\ (1 - \cos \Psi_1) - \lambda_1\ (\tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2 - \tfrac{1}{3}\,\alpha_1{}^3)}{\mathrm{tang}\,\frac{\Psi_1}{2} + \lambda_1 \cot \Psi_1}$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\,\alpha_1{}^2 - \alpha_1)\, \Psi_1\ \ldots,\ (467\,a).$$

Die Mittellinie des Druckes in einem kreisförmigen Bogen, dessen Wölbsteine von gleicher Höhe sind und dessen Belastung über verschiedene Punkte seiner Außenwölbung vertheilt sind.

§. 340. Man nehme an, der Druck der Belastung sei vollkommen vertikal und von der Art, daß irgend ein Theil FT der äußeren Wölbungslinie das Gewicht einer unmittelbar darüber liegenden Masse GFTV zu ertragen habe, welche von oben durch die gerade Linie GV begränzt ist. Außer den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphs bezeichne man hier noch mit



ι den Neigungswinkel der Linie GV gegen den Horizont, mit

βR den Abstand AD, mit

z den Abstand DZ und mit

μ den konstanten Faktor, mit welchem das Gewicht der Kubikeinheit der Gewölbmasse multiplizirt werden muß, um das Gewicht einer Kubikeinheit der Belastung zu ergeben.

Da hier ebenfalls Winkel ACT $= \vartheta$ und ACF $= \Theta$ angenommen wird; so hat man

$$\text{Fläche GFTV} = \int_{\Theta}^{\vartheta} \overline{TV} . dz;$$

es ist aber $TV = MZ - (MT + VZ)$ und

$$MZ = CD = R + \beta R, \; MT = R\cos\vartheta,$$

$$VZ = \overline{DZ} . \text{tang}\,\iota = R\sin\vartheta . \text{tang}\,\iota; \text{ mithin } NT + VZ$$

$$= R\cos\vartheta + R\sin\vartheta . \text{tang}\,\iota = R\,\frac{(\cos\vartheta\cos\iota + \sin\vartheta\sin\iota)}{\cos\iota}$$

$$= \frac{R\cos(\vartheta - \iota)}{\cos\iota}, \text{ und}$$

$$TV = R\left[1 + \beta - \frac{\cos(\vartheta - \iota)}{\cos\iota}\right].$$

Auch ist $z = \overline{DZ} = R\sin\vartheta$, mithin

$$dz = \frac{dz}{d\vartheta} d\vartheta = \mathrm{R}\cos\vartheta . d\vartheta.$$

Hiernach hat man

$$\text{Fläche } \mathbf{CFTV} = \mathrm{R}^2 \int_{\Theta}^{\vartheta} \left[1 + \beta - \frac{\cos(\vartheta - \iota)}{\cos\iota}\right] \cos\vartheta . d\vartheta.$$

und folglich

$$\mathrm{Y} = \text{Gewicht der Masse } \mathbf{GFTV} = \mu \mathrm{R}^2 \int_{\Theta}^{\vartheta} \left[1 + \beta - \frac{\cos(\vartheta - \iota)}{\cos\iota}\right] \cos\vartheta . d\vartheta$$

$$= \mu \mathrm{R}^2 \left[(1+\beta)(\sin\vartheta - \sin\Theta) - \frac{\sin(2\vartheta - \iota) - \sin(2\Theta - \iota)}{4\cos\iota} - \tfrac{1}{2}(\vartheta - \Theta)\right] \quad \ldots . (469)$$

Ebenso hat man

$$\mathrm{Y}y = \text{Moment von } \mathbf{GFTV}$$

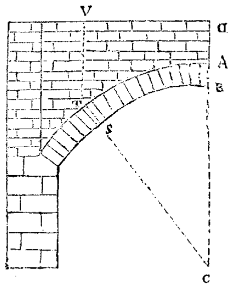
$$= \int_{\Theta}^{\vartheta} \overline{\mathrm{TV}} . z dz = \mu \mathrm{R}^3 \int_{\Theta}^{\vartheta} \left[(1 + \beta) - \frac{\cos(\vartheta - 1)}{\cos\iota}\right] \sin\vartheta . \cos\vartheta . d\vartheta$$

$$= \mu \mathrm{R}^3 [\tfrac{1}{2}(1+\beta)(\sin^2\vartheta - \sin^2\Theta) + \tfrac{1}{3}(\cos^3\vartheta - \cos^3\Theta) - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\iota(\sin^3\vartheta - \sin^3\Theta)] \quad \ldots . (470)$$

Substituirt man diese Werthe für Y und Y y in die Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs; so erhält man daraus die Beziehungen, welche dem gegenwärtigen Falle entsprechen.

§. 341. Fall eines Bogens in Form eines Kreisabschnittes, dessen Übermauerung durch eine Horizontale begränzt ist.

Nimmt man als den einfachsten Fall die Linie DV horizontal und das Material der Übermauerung von derselben Beschaffenheit, wie das des Gewölbes an, und betrachtet einen im Schlusse stetig übergehenden Bogen, sodaß $\iota = o$, $\mu = 1$, $\Theta = o$ ist; so



erhält man, wenn man die hieraus hervorgehenden Werthe von Y und Yy aus den Gleichungen (469) und (470) in die Gleichung (460) substituirt und dieselbe für $\frac{P}{r^2}$ auflöst,

$$\frac{P}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)^2(1+\beta)\sin^2\Psi + \frac{1}{6}(1+\alpha)^2(1-2\alpha)\cos^3\Psi + (\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2})\cos\Psi - \frac{1}{2}\Psi\sin\Psi + \frac{1}{3}}{1+\lambda-\cos\psi} \quad \ldots\ldots (471)$$

Differenziirt man diese Gleichung in Beziehung zu Ψ und setzt $\frac{dP}{d\Psi} = o$ (s. §. 339); so kommt, wenn man gleichzeitig annimmt, daß die Mittellinie des Druckes durch den obersten Punkt A des Schlußsteines gehe, sodaß $\lambda = \alpha$ ist,

$$\frac{2}{3}(1-2\alpha)\cos^3\Psi - [(1-\alpha)(1+\beta)+(1+\alpha)(1-2\alpha)]\cos^2\Psi + \left[\frac{1}{(1+\alpha)^2}+2(1-\alpha^2)(1+\beta)\right]\cos\Psi$$

$$+\frac{1}{(1+\alpha)^2}[1-(1+\alpha)\cos\Psi]\frac{\Psi}{\sin\Psi} - (1-\alpha)(1+\beta) - \frac{2}{3(1+\alpha)^2} - \frac{1+\frac{2}{3}\alpha^3}{1+\alpha}$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots (472)$$

In dem Falle, wo die Mittellinie des Druckes durch den tiefsten Punkt des Schlußsteines geht, sodaß $\lambda = o$ ist (wobei aber immer vorausgesetzt wird, daß das Gewölbe ein Bestreben habe, so zu brechen, daß der Scheitel herabsinkt, und daß demnach die Mittellinie des Druckes die innere Wölbungslinie berührt) ergibt die Gleichung (471)

$$\frac{P}{r^2} = \frac{1}{2}(1+\alpha^2)(1+\beta)(1-\alpha)(1+\cos\Psi) - \frac{1}{6}(1+\alpha)^2(1-2\alpha)(1+\cos\Psi)\cos\Psi$$

$$-\frac{1}{2}\Psi\cot\frac{\Psi}{2} + \frac{1}{3} = 0 \quad \ldots\ldots (473)$$

und hieraus folgt für $\frac{dP}{d\Psi}=0$

$$\tfrac{2}{3}(1+\alpha)^2(1-2\alpha)\cos^2\Psi+(1+\alpha)^2[(1-\alpha)\beta+\tfrac{1}{3}(4-5\alpha)]\cos\Psi+\frac{\Psi}{\sin\Psi}$$
$$+[(1+\alpha)^2(1-\alpha)(1+\beta)+\tfrac{2}{3}+\alpha^2(1+\tfrac{2}{3}\alpha)]=0\;\ldots\;(474)$$

Fall eines gothischen Bogens, bei welchem die Übermauerung über jedem Halbbogen durch eine geneigte gerade Linie begränzt ist, und das Material der Übermauerung von dem des Gewölbes verschieden ist.

§. 342. Verfährt man bei diesem allgemeinen Falle der Stabilität eines kreisförmigen Gewölbbogens ganz in derselben Weise, wie im vorhergehenden Paragraphe; so erhält man zuvörderst aus der Gleichung (460)

$$\frac{P}{r^2}=\frac{(\alpha+\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3)(\cos\Theta-\cos\Psi)-(\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2)(\Psi-\Theta\Psi)\sin+\frac{Yy}{r^3}-\frac{Y}{r^2}\sin\Psi}{\cos\Psi-(1+\lambda)\cos\Theta}$$
$$\ldots\;(475)$$

In dieser Gleichung sind die Werthe von Y und Yy diejenigen, welche man durch die Substitution von Ψ für ϑ aus den Gleichungen (469) und (470) erhält. Differenziirt man dieselbe in Beziehung zu Ψ und setzt $\frac{dP}{d\Psi}=o$ (s. §. 339) und auch $\lambda=\alpha$; so ergibt sich

$$(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\alpha^3-\tfrac{1}{3}\alpha^4)\cos\Theta\sin\Psi-(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\sin\Psi\cos\Psi$$
$$-(\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha^2)[1-(1+\alpha)\cos\Theta\cos\Psi](\Psi-\Theta)-[1-(1+\alpha)\cos\Theta\cos\Psi]\frac{Y}{r^2}+\frac{Yy}{r^3}\sin\Psi$$
$$+[\cos\Psi-(1+\alpha)\cos\Theta]\left[\frac{1}{r^3}\frac{d(Yy)}{d\Psi}-\frac{\sin\Psi}{r^2}\frac{dY}{d\Psi}\right]=0\;\ldots\;(476)$$

Substituirt man hierin die Werthe von $\frac{Y}{r^2}$ und $\frac{Yy}{r^3}$ aus den Gleichungen (469) und (470); so erhält man nach einer sehr mühsamen Reduktion die folgende Bestimmungsgleichung für den Bruchwinkel Ψ

$$A+B\cos\Psi-C\cos^2\Psi+D\cos^3\Psi+E\sin\Psi-F\sin\Psi\cos\Psi-G\sin^3\Psi$$

$$-H\cot\Psi+J(1-K\cos\Psi)\frac{(\Psi-\Theta)}{\sin\Psi}+\frac{L}{\sin\Psi}=0, \ldots (477)$$

eine Gleichung, worin

$$A=\mu(1+\alpha)^2\left\{\tfrac{2}{3}(1+\alpha)\operatorname{tang}\iota.\sin^2\Theta-(1+\beta)[2-(1+\alpha)\cos^2\Theta]-\tfrac{2}{3}(1+\alpha)\cos\Theta\right\}$$

$$+(2\alpha+\alpha^2-\alpha^3-\tfrac{2}{3}\alpha^4)\cos\Theta,$$

$$B=(1+\alpha)^2[2\mu(1-\alpha^2)(1+\beta)\cos\Theta-(1-\mu)]+1,$$

$$C=\mu(1+\alpha)^2[(1-\alpha)(1+\beta)+(1+\alpha)(1-2\alpha)\cos\Theta],$$

$$D=\tfrac{2}{3}\mu(1+\alpha)^2(1-2\alpha),$$

$$E=\mu(1+\alpha)^2(1-2\alpha)\operatorname{tang}\iota=\tfrac{3}{2}D\operatorname{tang}\iota,$$

$$F=\mu(1+\alpha)^3(1-2\alpha)\operatorname{tang}\iota.\cos\Theta=E(1+\alpha)\cos\Theta,$$

$$G=\tfrac{2}{3}\mu(1+\alpha)^2(1-2\alpha)\operatorname{tang}\iota=D\operatorname{tang}\iota,$$

$$H=\tfrac{1}{2}\mu\left[2(1+\beta-\frac{\cos(\Theta-\iota)}{\cos\iota}\right]\sin 2\Theta,$$

$$J=1-(1-\mu)(1-\alpha)^2,$$

$$K=(1+\alpha)\cos\Theta,$$

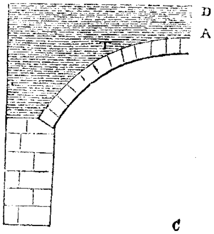
$$L=\mu(1+\alpha)^2\left[2(1+\beta)-\frac{\cos(\Theta-\iota)}{\cos\iota}\right]\sin\Theta$$

ist.

Wenn man von den vorhergehenden Formeln eine Anwendung machen wollte; so müßte man nothwendig eine Reihe von Werthen für Ψ annehmen und die entsprechenden Werthe von β für einen jeden gegebenen Werth von $\alpha, \iota, \mu, \Theta$ berechnen. Die tabellarisch zusammengestellten Resultate einer solchen Rechnung würden die Werthe für Ψ erkennen lassen, welche gegebenen Werthen von $\alpha, \beta, \iota, \mu, \Theta$ angehören. Substituirte man alsdann diese Werthe von Ψ in die Gleichung (475); so könnte man den entsprechenden horizontalen Schub und hieraus die Polargleichung (459) für die Mittellinie des Druckes bestimmen.

Fall eines kreisförmigen Gewölbbogens mit gleich hohen Wölbsteinen, welcher den Druck von Wasser zu ertragen hat.

§. 343. Betrachten wir jetzt den Fall eines schiefen Druckes gegen die äußere Wölbungslinie, und nehmen wir an, derselbe werde durch eine Wassermasse hervorgebracht, deren Spiegel in der Höhe β R über dem Scheitel des Schlußsteines steht.



Da der Druck des Wassers perpendikular gegen die äußere Wölbungslinie gerichtet ist; so wird dessen Richtung überall durch den Mittelpunkt C gehen, sodaß sein Moment in Beziehung zu diesem Punkte verschwindet und $Yy - Xx = o$ wird. Außerdem ist die vertikale Komponente des Druckes, welchen eine über AT vertikal abgeschnittene Wassermasse auf diesen Theil des Bogens äußert, nach hydrostatischen Prinzipien gleich dem Gewichte der Letzteren, und die horizontale Komponente ist gleich dem horizontalen Drucke, welchen die gedachte Wassermasse gegen die vertikale Projektion des Bogentheiles AT hervorbringen würde, also

$$X = \mu R^2 \int_{\Theta}^{\vartheta} (1 + \beta - \cos\vartheta)\sin\vartheta \,.\, d\vartheta,$$

weil $Rd\vartheta \sin\vartheta$ die vertikale Projektion des Bogenelementes $Rd\vartheta$ bei T, $R(1 + \beta - \cos\vartheta)$ die Tiefe desselben unter dem Wasserspiegel, und das Gewicht Eines Kubikfußes Wasser gleich dem Gewichte Eines Kubikfußes der Gewölbmasse, multiplizirt mit μ, ist. Integrirt man den vorstehenden Ausdruck und setzt $R = (1 + \alpha) r$; so kommt

$$X = \mu (1+\alpha)^2 r^2 [(1+\beta)(\cos\Theta - \cos\vartheta) - \tfrac{1}{2}(\sin^2\vartheta - \sin^2\Theta)] \ldots (478)$$

Nimmt man nun $\Theta = o$ an; so ergibt sich aus Gleichung (469) für den Theil der äußeren Wölbungslinie, welcher zwischen dem Scheitel und der Brechungsfuge liegt,

$$\frac{Y}{r^2} = \mu (1 + \alpha)^2 [(1 + \beta)\sin\Psi - \tfrac{1}{4}\sin 2\Psi - \tfrac{1}{2}\Psi]$$

und aus Gleichung (478)

$$\frac{X}{r^2} = \mu(1+\alpha)^2 [(1+\beta)(1-\cos\Psi) - \tfrac{1}{2}\sin^2\Psi],$$

demnach ist

$$\frac{Y}{r^2}\sin\Psi - \frac{X}{r^2}\cos\Psi = \mu(1+\alpha)^2[(1+\beta)(1-\cos\Psi) - \tfrac{1}{2}\Psi\sin\Psi] \ldots (479)$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung (460), setzt $Yy - Xx = o$, lös't die Gleichung für $\frac{P}{r^2}$ auf und setzt $\frac{p}{r} = 1 + \lambda$; so kommt

$$\frac{P}{r^2} = \frac{[\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\mu(1+\alpha)^2]\Psi\sin\Psi - [\alpha + \alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \mu(1+\alpha)^2(1+\beta)](1-\cos\Psi)}{1+\lambda-\cos\Psi} \quad \ldots\ldots (480)$$

Differenziirt man diese Gleichung in Beziehung zu P und Ψ setzt $\frac{dP}{d\Psi} = o$ (s. §. 339); so erhält man zur Bestimmung des Bruchwinkels Ψ nach gehöriger Reduktion die Gleichung

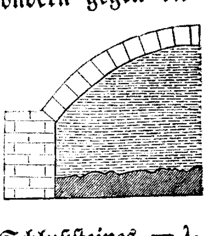
$$\Psi\left[\tang\frac{\Psi}{2} - \lambda\cot\Psi\right] - (1-\cos\Psi) + A\lambda = 0, \ldots.(481)$$

worin

$$A = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \mu(\frac{1}{2}+\beta)(1+\alpha)^2}{\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\mu(1+\alpha)^2} \ldots.(482)$$

ist. Da hier der Bruch fast immer so erfolgen wird, daß sich der Scheitel senkt; so hat man $\lambda = \alpha$ zu setzen, sodaß $p = R$ ist.

Wenn sich der Druck des Wassers nicht gegen die äußere, sondern gegen die innere Wölbungslinie äußert, indem er den Bogen in die Höhe zu treiben strebt; so wird der Brechungspunkt in der äußeren Wölbungslinie liegen. Setzt man demnach in der Gleichung (459) $\varrho = R$, ferner $r = R \times (1 - \alpha_1)$ und den Abstand des Angriffspunktes der Kraft P von der oberen Kante des



Schlußsteines $= \lambda_1 R$, also $\frac{p}{R} = (1 - \lambda_1)$ (s. die Note zu §. 339);

so erhält man zuvörderst auf eine ähnliche Weise, wie vorhin, da hier X und Y negativ zu nehmen sind,

$$\frac{Y}{R^2}\sin\Psi_1-\frac{X}{R^2}\cos\Psi_1=-\mu(1-\alpha_1)^2[(1+\beta_1)(1-\cos\Psi_1)-\tfrac{1}{2}\Psi_1\sin\Psi_1]\ldots(483)$$

worin β_1 die Höhe des Wasserspiegels über dem Scheitel der inneren Wölbungslinie bezeichnet. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (459), worin man zuvor $\varrho = R$ und $\vartheta = \Psi_1$ gesetzt hat; so kommt

$$\frac{P}{R^2}=$$

$$\frac{[\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_1{}^2+\frac{1}{2}\mu(1-\alpha_1)^2]\Psi_1\sin\Psi_1-[\alpha_1-\alpha_1{}^2+\frac{1}{3}\alpha_1{}^3+\mu(1-\alpha_1)^2(1+\beta_1)](1-\cos\Psi_1)}{1-\lambda_1-\cos\Psi_1}$$

$$\ldots\ldots(484)$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{dP}{d\Psi_1}=o$ setzt, zur Bestimmung des Bruchwinkels Ψ_1

$$\Psi_1\left[\tang\frac{\Psi_1}{2}+\lambda_1\cot\Psi_1\right]-(1-\cos\Psi_1)-A\lambda_1=0,\ldots\ldots(485)$$

worin

$$A=\frac{-\frac{1}{2}\alpha_1{}^2+\frac{1}{3}\alpha_1{}^3+\mu(\frac{1}{2}+\beta_1)(1-\alpha_1)^2}{\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_1{}^2+\frac{1}{2}\mu(1-\alpha_1)^2}$$

ist.

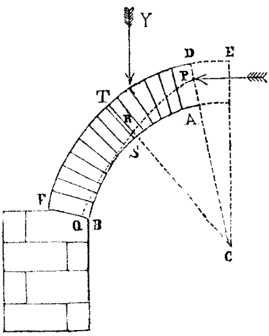
Da hier bei erfolgendem Bruche die Mittellinie des Druckes durch die untere Kante des Schlußsteines gehen wird; so hat man $\lambda_1=\alpha_1$ zu setzen, sodaß $p=r$ wird.

Das Gleichgewicht eines Gewölbbogens, dessen Wölbsteine in genauer Berührung mit einander sind.

§. 344. Die Gleichungen (464) und 461) bestimmen vollständig den Werth von P unter der ersten der beiden in §. 336 aufgestellten Bedingungen, daß nämlich die Mittellinie des Druckes, welche durch einen gegebenen Punkt des Schlußsteines geht, dessen Lage durch einen gegebenen Werth von λ bestimmt ist, mit der inneren Wölbungslinie eine geometrische Berührung besitze. (Für den Fall, daß der Bruch des Gewölbes durch ein

Einwärtsfallen der unteren Gewölbtheile und durch ein gleichzeitiges Emporheben des Scheitels zu erfolgen strebt, wobei also die Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie berührt, gelten zur Bestimmung des Werthes von P die Gleichungen (464^a) und (461^a) in der Note zu §. 339.)

Es bleibt jetzt noch übrig, den Werth der Kraft P unter der zweiten jener beiden Bedingungen zu bestimmen, daß nämlich ihr Angriffspunkt P am Schlußsteine von der Art sei, daß dadurch jene Kraft den kleinsten Werth erhalte, welcher sich mit der eben erwähnten Bedingung vereinigen läßt.



Es leuchtet ein, daß ein jeder andre Werth von λ dem Bruchwinkel Ψ einen andern Werth gibt, und daß von allen diesen verschiedenen Werthen von Ψ derjenige, welcher der Kraft P den kleinsten Werth gibt, der wahre Bruchwinkel sein wird, vorausgesetzt daß eine vollkommene Berührung aller Wölbsteine in den Fugen statt findet. Hierbei ist es jedoch durchaus nothwendig, daß dieser Werth von Ψ einem Werthe von λ entspricht, welcher positiv und nicht größer als α ist, weil der Angriffspunkt der Kraft P nothwendig zwischen den beiden Kanten A und D des Schlußsteines liegen muß.

Um daher den gesuchten kleinsten Werth von P zu bestimmen, ermittele man das absolute Minimum dieser Kraft, welches die Gleichungen (461) und (464) zulassen, indem man Gleichung (461), in welcher die Größe λ oder p nicht vorkommt, für P und Ψ differenziirt und $\frac{dP}{d\Psi} = o$ setzt. Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth von Ψ wiederum in Gleichung (461); so kann man daraus den entsprechenden Werth von P entwickeln. Hiernach müssen diese Werthe von Ψ und P in Gleichung (464) gesetzt werden, um daraus λ zu entwickeln und zu sehen, welchen Werth diese Größe annimmt. Findet es sich, daß dieser Werth von λ zwischen o und α liegt; so sind die für Ψ und P gefundenen Werthe diejenigen, welche in der Wirklichkeit stattfinden werden: ergibt sich jedoch $\lambda > \alpha$ oder $\lambda < o$; so sind jene Werthe von Ψ und P **nicht** die wahren, und da in diesen beiden Fällen die Mittellinie des Druckes resp. durch die obere oder durch die untere Kante des Schlußsteines gehen muß; so erhält man den gesuchten Werth von Ψ unmittelbar aus Gleichung (464), wenn man darin resp. $\lambda = \alpha$ oder $\lambda = o$ setzt. Dieser Werth von Ψ, in Gleichung (461) gesetzt, ergibt alsdann ferner den wahren Werth von P. Noch ist hierbei zu bemerken, daß wenn man findet, daß der Angriffspunkt der Kraft P näher an der unteren, als an der oberen Kante des Schlußsteines liegen müßte, man ein ganz ähnliches Verfahren mit den Gleichungen (461^a) und (464^a) in der Note zu §. 339 einzuschlagen habe, um zu prüfen, ob die durch diese Gleichungen bestimmte Kraft P nicht noch kleiner sein sollte, als die durch die Gleichungen (461) und (464) bestimmte, sodaß der Bruch des Gewölbes durch ein Emporsteigen des Scheitels und ein Einwärtsfallen der unteren Gewölbtheile zu erfolgen strebte.

Differenziirt man also zuvörderst die Gleichung (461), welche λ oder p nicht enthält, in Beziehung zu P und Ψ, indem man Y als konstant annimmt, und setzt $\frac{dP}{d\Psi} = o$; so erhält man

$$\cos^2 \Psi = \frac{\frac{P}{r^2} + \alpha^2 (\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha(\frac{1}{2}\alpha + 1)} \dots (486)$$

Beachtet man nun, daß $\frac{1}{2} \sin 2\Psi = \sin \Psi \cos \Psi = \cos^2 \Psi \times \tang \Psi$ ist; so hat man

$$\frac{1}{2} \sin 2\Psi = \left[\frac{\frac{P}{r^2} + \alpha^2 (\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha(\frac{1}{2}\alpha + 1)}\right] \tang \Psi,$$

und wenn man die rechte Seite dieser Gleichung mit Hülfe der Gleichung (461) eliminirt,

$$\sin 2\Psi - 2\Psi = \frac{4Y}{\alpha(\alpha + 2) r^2} - 2\Theta \dots (487).$$

Aus dieser Gleichung ist der Bruchwinkel Ψ zu bestimmen. Kennt man denselben hieraus; so ergibt sich der Werth von P aus der Gleichung (486), nach welcher man

$$\frac{P}{r^2} = \frac{1}{6}\left[3\alpha(\alpha+2)\cos^2\Psi - \alpha^2(2\alpha+3)\right] \ldots . (488).$$

hat.

Um nun den entsprechenden Werth von λ zu bestimmen, so eliminire man $\cos\Psi$ zwischen den Gleichungen (462) und (486); Dies ergibt

$$\frac{p}{r} = (1+\lambda)\cos\Theta$$

$$= \frac{r^2}{P}\left\{\sqrt{\alpha(\alpha+2)\left[\frac{2P}{r^2} + \alpha^2(\tfrac{2}{3}\alpha+1)\right]} - \alpha(\tfrac{1}{3}\alpha^2+\alpha+1)\cos\Theta - \frac{Yy}{r^3}\right\}$$

$$\ldots . (489).$$

Der durch diese Gleichung gegebene Werth von λ bestimmt den wirklichen Angriffspunkt der Kraft P am Schlußsteine, wie schon erwähnt, nur dann, wenn λ positiv und nicht größer als α ist. Wäre λ positiv und $> \alpha$; so würde die Mittellinie des Druckes durch die obere Kante des Schlußsteines gehen: wäre λ negativ; so würde jene Linie durch die untere Kante des Schlußsteins gehen, und in beiden Fällen würde man aus den Gleichungen (464) und (461) unmittelbar durch die Substitution von resp. $\lambda = \alpha$ oder $\lambda = o$ die wahren Werthe von Ψ und P erhalten.*)

*) Für den Fall, daß die Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie berührt, sodaß der Bruch durch das Einwärtsfallen der unteren Gewölbtheile herbeigeführt werden würde, ein Fall, der namentlich dann der wirkliche sein wird, wenn man λ negativ oder, wennauch positiv, doch $> \frac{1}{2}\alpha$ fände; so ergeben die Gleichungen aus der Note zu §. 339 statt der in dem vorstehenden Paragraphe entwickelten resp.

$$\sin 2\Psi_1 - 2\Psi_1 = \frac{4}{\alpha}\frac{Y}{(2-\alpha_1)} - 2\Theta \ldots . (487^a).$$

zur Bestimmung des Bruchwinkels Ψ_1; ferner

$$\frac{P}{R_2} = \frac{1}{6}\left[3\alpha_1(2-\alpha_1)\cos^2\Psi_1 - \alpha^2(2\alpha-3)\right] \ldots . (488^a).$$

zur weiteren Bestimmung der Kraft P und alsdann

$$\frac{p}{R} = (1-\lambda_1)\cos\Theta$$

$$= \frac{R^2}{P}\left\{\sqrt{\alpha_1(2-\alpha_1)\left[\frac{2P}{R^2} + \alpha^2(\tfrac{2}{3}\alpha-1)\right]} - \alpha(\tfrac{1}{2}\alpha^2-\alpha+1)\cos\Theta - \frac{Yy}{R^3}\right\}$$

$$\ldots . (489^a).$$

Ein so vollkommenes Aneinanderschließen der Berührungsflächen der Wölbsteine, wie es in dem gegenwärtigen Paragraphe vorausgesetzt ist, wird in der That durch den Mörtel bewirkt, mit welchem die Steine versetzt werden. Man kann daher annehmen, daß die obigen Untersuchungen die Theorie eines mit Mörtel versetzten Gewölbbogens in sich schließen, wenn dabei der Einfluß der Adhäsion der mit Mörtel bedeckten Flächen vernachlässigt wird. Obwol nun diese Adhäsion dem Bogen mehr Stabilität verleihet, als wenn sie nicht vorhanden wäre; so ist doch der Bogen beim anfänglichen Setzen sehr geneigt, sich in denjenigen Richtungen zu trennen, in welchen jene Adhäsion zur Stabilität erforderlich sein könnte, und der vorsichtige Ingenieur wird immer die Autorität des alten Grundsatzes anerkennen, und dem Bogen solche Verhältnisse geben, daß er sicher steht, selbst wenn keine Mörteladhäsion vorhanden wäre.

Anwendungen der Gewölbtheorie.

§. 345. Man bemerkt daß die Gleichung (464) oder (477) den Bruchwinkel Ψ als Funktion der Belastung **Y** und des horizontalen Abstandes y ihres Schwerpunktes vom Mittelpunkte **C** der Wölbungslinien, ferner des Halbmessers r und der Höhe αr der Wölbsteine vollkommen bestimmt, wenn man die Größe λ als bekannt voraussetzt, welche in den meisten Fällen $= \alpha$ zu nehmen ist; außerdem bemerkt man, daß dieser Winkel von dem Winkel des Bogens ganz unabhängig ist und sich stets gleich bleibt, ob der Bogen die Hälfte oder irgend einen Theil eines ganzen Kreises bilde. Hieraus folgt, daß wenn der Winkel des Halbbogens kleiner ist, als der aus der obigen Gleichung für Ψ ge-

Auch hier gilt die frühere Bemerkung, daß die aus den Gleichungen (487a) und (488a) für Ψ_1 und **P** gefundenen Werthe nur dann die wahren sind, wenn der aus Gleichung (489a) sich ergebende Werth von λ_1 positiv und nicht größer als α_1 ist. Wäre hier λ_1 positiv und $> \alpha_1$; so würde die Mittellinie durch die untere Kante des Schlußsteines gehen: wäre λ_1 negativ; so würde jene Linie durch die obere Kante des Schlußsteines gehen (da hier der Abstand $\lambda_1 \mathbf{R} = \overline{\mathbf{DP}}$ des Angriffspunktes der Kraft **P** von der oberen Kante des Schlußsteines gemessen ist) und in beiden Fällen würde man die wahren Werthe von Ψ_1 und **P** unmittelbar aus den Gleichungen (464a) und (461a) durch die Substitution von resp. $\lambda_1 = \alpha_1$ oder $\lambda_1 = o$ zu ermitteln haben.

fundene Werth, keine derartige Berechnungspunkte vorhanden sein können, wie sie im Vorhergehenden angenommen sind, indem die Mittellinie des Druckes alsdann durch den Anfang des Bogens geht und die innere Wölbungslinie daselbst durchschneidet.

Nachdem der Werth Ψ aus jener Gleichung gefunden ist, bestimmt die Gleichung (461) den Werth von P, und wird dieser Werth von P in die Gleichung (459) gesetzt; so ist die Mittellinie des Druckes vollkommen bestimmt. Gibt man in der letzteren Gleichung dem Winkel ϑ den Werth ACB (s. S. 107); so läßt der entsprechende Werth von ϱ den Punkt Q erkennen, in welchem die Mittellinie des Druckes den untersten Wölbstein oder die oberste Fläche der Widerlage durchschneidet. Da nun offenbar P gleich dem horizontalen Schube ist, welcher sich gegen die Widerlage äußert, und der vertikale Druck auf die Letztere gleich dem Gewichte des Halbbogens mit der Belastung ist; so sind auch alle Elemente bekannt, welche die Stabilität der Widerlage bestimmen, auf der das Gewölbe ruhet (s. §§. 295 u. 314).

Mit der Auflösung der Gleichung (464) oder (477) in Beziehung zu Ψ sind gleichzeitig alle Elemente der Theorie des Gewölbbogens in Rechnung gebracht. Unglücklicherweise bietet diese Auflösung große Schwierigkeiten dar. Bei dem Mangel irgend einer direkten Auflösung, gibt es jedoch verschiedene Methoden, durch welche die numerische Beziehung zwischen Ψ und Y auf indirektem Wege ermittelt werden kann. Unter diesen ist die einfachste folgende:

Man bemerkt, daß jene Gleichung für Y auflösbar ist. Statt daß man daher den Werth von Ψ für einen gegebenen Werth von Y bestimmt, suche man, umgekehrt, den Werth von Y für eine Reihe gegebener Werthe von Ψ. Kennt man die Art der Vertheilung der Belastung Y; so sind auch die Werthe von y in Beziehung zu jenen Werthen von Ψ bekannt, und man ist demnach im Stande, die numerischen Werthe von Y zu bestimmen und in einer Tabelle zusammenzustellen. Aus solchen Tabellen können durch bloße Einsicht die Werthe von Ψ entnommen werden, welche gegebenen Werthen von Y entsprechen.

Wenn die Belastung Y konstant oder nur über gewisse Punkte des Bogens vertheilt ist, und man die Größe λ nicht als im Voraus gegeben ansehen will; so sind die Werthe von Ψ, P und λ

durch die Gleichungen (487), (488), (489) oder wenn $\lambda > \alpha$ gefunden wird, sodaß man alsdann $\lambda = \alpha$ zu setzen hat, wie früher durch die Gleichungen (464) und (461) vollkommen bestimmt. Die ersteren drei Gleichungen setzen zwar ein vollkommenes Aneinanderschließen der Wölbsteine voraus; man kann das Stattfinden dieser Bedingung bei einem mit Mörtel versetzten Gewölbe aber auch wirklich annehmen.

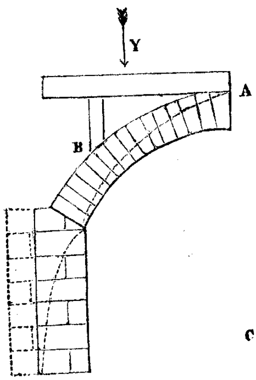
Nachdem die Werthe von **X, Y, P** durch die vorstehenden Methoden bestimmt sind, hat man dieselben in Gleichung (459) zu substituiren, um die Gleichung für die Mittellinie des Druckes herzustellen. Setzt man hierin $p = \mathrm{R} = (1+\alpha)r$, was sich auf den Fall bezieht, daß der Scheitel des Gewölbes herabzusinken strebt; so gibt der Werth von ϑ, welcher dem Werth $\varrho = \mathrm{R} = (1+\alpha)r$ entspricht, den Punkt an, in welchem die Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie durchschneidet. Ist dieser Werth von ϑ kleiner, als der Winkel **ACB** des Halbbogens; so wird der Durchschnitt der Mittellinie des Druckes mit der äußeren Wölbungslinie oberhalb des Bogenanfanges stattfinden, und der Bogen wird zusammenbrechen, indem sich sein Scheitel senkt und die unteren Theile desselben nach außen geworfen werden.

Wenn man vermittelst der Gleichung (459) den ganzen Zug der Mittellinie des Druckes konstruiren wollte; so müßte man, falls die Kräfte **X** und **Y** nicht durch eine stetig über den ganzen Bogen vertheilte Belastung erzeugt würden, sondern nur in gewissen einzelnen Punkten vereinigt wären, wol darauf achten, daß zur Bestimmung des Werthes von ϱ für irgend einen gegebenen Werth **ECT** des Winkels ϑ nur diejenigen Kräfte für **X** und **Y** substituirt würden, deren Angriffspunkte zwischen dem Punkte **T** und dem Scheitel des Gewölbes liegen, weil es diese Kräfte allein sind, welche das Gleichgewicht des Bogentheiles **ASTD** bedingen (s. §. 338).

Das Vorstehende bezieht sich immer nur auf den Fall, daß der Einsturz des Gewölbes durch ein Niedersinken des Scheitels zu erfolgen strebt, ein Fall, welcher in der That der gewöhnichste ist. Fände das Umgekehrte statt, hätte also das Gewölbe ein Bestreben, in der Weise zusammenzubrechen, daß die unteren Bogentheile nach innen fielen und der Scheitel gehoben würde;

so müßte man sich der in den begleitenden Noten aufgestellten Gleichungen ähnlich, wie der vorhin erwähnten, bedienen. Ob der Eine oder der andere dieser beiden Fälle stattfinde, erfährt man dadurch, daß man untersucht, für welche dieser beiden Voraussetzungen der horizontale Schub **P** der kleinste ist.

Beispiel 1. — Es sei ein kreisförmiger Gewölbbogen gegeben, dessen Wölbsteine sämmtlich eine Höhe von $\frac{1}{5}$ des Halbmessers der inneren Wölbungslinie haben, sodaß $\alpha = 0{,}2$ ist. Die Belastung sei in drei Punkten **A, B, D** der äußeren Wölbungslinie angebracht, von welchen **A** im Scheitel liegt und **B,D** um 45^0 von demselben abstehen; außerdem sei die Belastung dergestalt vertheilt, daß $\frac{3}{8}$ derselben auf einem jeden der Punkte **B** und **D** und das übrig bleibende $\frac{1}{4}$ auf dem Punkte **A** ruhet.

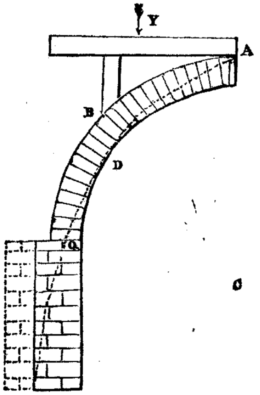


Betrachtet man nun einen Halbbogen; so hat man für die Belastung desselben im Punkte **B** $\frac{3}{8}$ und im Punkte **A** $\frac{1}{8}$ der gesammten Belastung des ganzen Gewölbes. Die Summe dieser beiden Gewichte ist die früher mit **Y** bezeichnete vertikale Kraft. Setzt man dieselben daher nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente in eine einzige zusammen; so findet man, daß ihr horizontaler Abstand vom Scheitel **A** oder vom Mittelpunkte **C** $\frac{3}{4}$ des horizontalen Abstandes des Punktes **B** von demselben Punkte beträgt, daß also $y = \frac{3}{4} \cdot r \sin 45^0$ oder $\frac{y}{r} = \frac{3}{4} \sin 45^0 = 0{,}5303301$ ist. Aus Gleichung (468) folgt demnach, daß keine Belastung im Stande ist, den Bruchwinkel größer, als 65^0, zu machen. Nimmt man denselben zu 60^0 an; so wird die Größe der Belastung **Y**, welche erforderlich ist, um einen solchen Bruchwinkel zu erzeugen, durch Gleichung (465) bestimmt, wenn man darin $\Psi = 60^0$, $\alpha = \lambda = 0{,}2$ und $\frac{y}{r} = 0{,}5303301$ setzt. Hierdurch erhält man $\frac{Y}{r^2} = 0{,}0138$. Substituirt man diesen Werth von $\frac{Y}{r^2}$ und auch den gegebenen

Werth von α und Ψ in Gleichung (462), indem man $\frac{p}{r} = 1 + \alpha = 1{,}2$ und $\Theta = o$ setzt; so findet man für den horizontalen Schub $\frac{P}{r^2} = 0{,}11832$. Die vorstehenden Werthe in die Gleichung (459) eingeführt, ergeben endlich für die Gleichung der Mittellinie des Druckes unterhalb des Punktes B

$$\varrho = r \cdot \frac{0{,}2426\,(1 - \cos\vartheta) + 0{,}1493}{0{,}0138 \sin\vartheta + 0{,}1183 \cos\vartheta + 0{,}22\,\vartheta \sin\vartheta}.$$

Wenn die Wölbungslinie einen Halbkreis bildet; so bestimmt der Werth von ϱ aus dieser Gleichung, welcher dem Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ entspricht, den Punkt Q, in welchem die Mittellinie des Druckes die obere Fläche der Widerlage durchschneidet. Dieser Werth ist $\varrho = 1{,}09 r$.



Wenn die Wölbungslinie den dritten Theil eines ganzen Kreises oder einen Bogen von 120° bildet; so entspricht der Werth von ϱ für den tiefsten Punkt des Gewölbes dem Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, und man findet hierfür $\varrho = r$, wie es auch nothwendig sein muß, da der Bruchwinkel nach dem Früheren $= 60°$ ist und demnach die Brechungspunkte in den Bogenanfängen liegen.

Im ersten Falle ist das Volum des Halbbogens mit Einschluß der Belastung durch die Formel M + Y (s. §. 338), d. i. durch

$$r^2 \left[(\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha) \frac{\pi}{2} + \frac{Y}{r^2} \right] = 0{,}3594 r^2,$$

im zweiten Falle durch

$$r^2 \left[(\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha) \frac{\pi}{3} + \frac{Y}{r^2} \right] = 0{,}2442\, r^2$$

dargestellt.

Nimmt man nun an, die Widerlagsmauer sei von demselben Materiale, wie der Bogen; so würde eine Masse derselben, deren Gewicht gleich dem vertikalen Drucke auf ihren Scheitel ist, im ersten Falle gleich $0{,}3594\, r^2$ und im zweiten Falle gleich $0{,}2442\, r^2$ sein, während der horizontale Druck P in beiden Fällen gleich $0{,}11832\, r^2$ bliebe. Substituirt man diese Werthe für die vertikale und horizontale Komponente des Druckes gegen den Scheitel einer Mauer in Gleichung (383) und setzt $\frac{1}{2}a - (\varrho - r)$ an die Stelle von k; so erhält man für die größte Höhe, bis zu welcher die lothrechte Widerlagsmauer erbauet werden kann, sodaß sie im Stande ist, das Gewölbe aufrecht zu erhalten, im ersten Falle

$$H = \frac{0{,}3594\,(a - 0{,}0\,9r)\, r^2}{0{,}11832\, r^2 - \frac{1}{2}a^2}$$

und im zweiten Falle

$$H = \frac{0{,}2442\, a\, r^2}{0{,}11832\, r^2 - \frac{1}{2}a^2}.$$

Wenn $0{,}11832\, r^2 - \frac{1}{2}a^2 = o$ oder $a = 0{,}4864\, r$ ist; so kann in jedem der beiden Fälle der Pfeiler bis zu einer beliebigen Höhe aufgeführt werden, ohne durch den Schub des Gewölbes umgeworfen zu werden. Man sieht, daß bei dieser Annahme die Stärke des Widerlagspfeilers nahe $\frac{1}{4}$ der Spannung des Gewölbes beträgt.

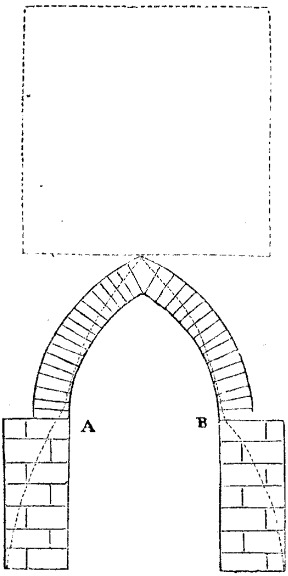
Wenn die Höhe des Pfeilers gegeben ist (wie es gewöhnlich der Fall ist) so kann die erforderliche Stärke desselben aus den obigen Gleichungen leicht gefunden werden. Nimmt man z. B. an, die Höhe des Pfeilers sei gleich dem Halbmesser der inneren Wölbungslinie; so erhält man für den ersten Fall $a = 0{,}2978\, r$ und für den zweiten Fall $a = 0{,}3\, r$.

Schließlich bemerkt man, daß in beiden Fällen die Belastung eines jeden Halbbogens $Y = 0{,}0138\, r^2$, welche dem angenommenen Bruchwinkel von 60^0 entspricht, sehr gering ist, sodaß in den meisten Fällen der Anwendung, wo diese Belastung einen größeren Werth hat, auch der Bruchwinkel mehr, als 60^0, beträgt (s. §. 339).

Beispiel 2. — Betrachten wir jetzt einen gothischen Bogen, dessen Wölbungslinien Kreissegmente von 60^0 bilden, und nehmen wir, wie früher, an, daß der Bruchwinkel 60^0 betrage und daß $\alpha = 0{,}2$ sei, außerdem aber sei die ganze Belastung in dem Scheitel des Gewölbes vereinigt, sodaß $\frac{y}{r} = \sin 30^0$ ist. Setzt man demnach in Gleichung (464) $\Theta = 30^0$, $\Psi = 60^0$, $\alpha = 0{,}2$ $\frac{y}{r} = \sin 30^0$ und $\lambda = \alpha$; so erhält man daraus $\frac{\mathbf{Y}}{r^2} = 1{,}3101$, und alsdann aus Gleichung (462) $\frac{\mathbf{P}}{r^2} = 0{,}67008$. Diese Werthe, in Gleichung (459) gesetzt, ergeben $\varrho = 1{,}048$, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist.

Hierdurch hat man alle Data zur Bestimmung der Stärke einer Widerlagsmauer von gegebener Höhe, welche im Stande ist, den Gewölbbogen aufrecht zu erhalten. Nimmt man diese Höhe gleich dem Halbmesser der inneren Wölbungslinie an; so erhält man durch Gleichung (384) für die Stärke a einer solchen Mauer, da hier das Gewicht des Halbbogens mit Einschluß seiner Belastung $\mathbf{M} + \mathbf{Y} = 1{,}54\,r^2$ und der horizontale Schub $\mathbf{P} = 0{,}67008\,r^2$ ist, $a = 0{,}422\,r$.

Die seitstehende Figur stellt diesen Bogen dar. Das Quadrat über seinem Scheitel zeigt die Dimensionen der Belastung



von demselben Materiale, welche im Stande ist, einen Bruchwinkel von 60^0 zu erzeugen. Die Pfeiler, welche die Stärke $0{,}422\,r$ besitzen, sind im Begriffe, umgeworfen zu werden, sobald ihre Höhe gleich dem Halbmesser r oder gleich **AB** ist. Der sehr bedeutende Betrag der Belastung **Y**, welcher in diesem Bogen einem Bruchwinkel von 60^0 entspricht, zeigt, daß dieser Winkel in den meisten praktischen Fällen einen geringeren Werth, als 60^0, besitzt.

Wenn die Belastung des gothischen Bogens mehr auf den Schenkeln, als auf dem Scheitel ruhet; so ist in der früher angegebenen Weise auch der Fall zu untersuchen, wo die

Mittellinie des Druckes die äußere Wölbungslinie berührt und der Bruch des Gewölbes in der Weise zu erfolgen strebt, daß die Schenkel nach innen fallen und der Scheitel gehoben wird. Wäre der horizontale Schub P unter dieser Voraussetzung geringer, als der, welcher sich für die Annahme der Niedersenkung des Scheitels ergibt; so würde man die Bedingungen des Gleichgewichtes nach den entsprechenden Formeln in den Noten der vorhergehenden Paragraphen zu entwickeln haben.

Tabellen über den Schub der gewölbten Bögen.

§. 346. Da die Formeln der vorhergehenden Paragraphe eine direkte Auflösung nicht zulassen; so ist es nothwendig, um dieselben für die praktische Anwendung brauchbar zu machen, die Resultate derselben tabellarisch zusammenzustellen. Solche Tabellen sind mit großer Sorgfalt von Garidel für Gewölbbögen berechnet, deren innere Wölbungslinie einen stetigen Kreisbogen bildet und deren Belastung aus einem mit der Gewölbmasse gleichartigen Materiale besteht, welches über einem jeden Halbbogen durch eine gegen den Horizont beliebig geneigte gerade Linie begränzt ist.

Unter Beibehaltung der Theorie von Coulomb ist Garidel zu einer Gleichung gelangt, (s. Tables des Poussées des Voûtes, p. 44. Paris, 1837) welche für den besonderen Fall, daß $\mu = 1$ und $\Theta = o$ ist, mit der obigen allgemeinen Gleichung (477) übereinstimmt. Vermittelst einer sinnreichen Näherungsmethode hat derselbe alsdann die Werthe des Bruchwinkels Ψ und der Größe $\frac{\mathrm{P}}{r^2}$ bestimmt, welche einer Reihe von Werthen für α und β entsprechen. Die Resultate dieser Rechnung sind in den diesem Werke angehängten Tabellen enthalten.

Nachdem man aus diesen Tabellen den Werth von $\frac{\mathrm{P}}{r^2}$ und aus den Gleichungen (469) und (470) die Werthe von Y und $\mathrm{Y}y$ kennt, so ergibt sich durch Substitution in Gleichung (459) die Mittellinie des Druckes. Aus dieser Gleichung findet man darauf den Durchschnittspunkt des mittleren Druckes mit der Oberfläche der Widerlagsmauer, und da die vertikale und horizontale Komponente dieses Druckes gleichfalls bekannt sind, indem die erstere gleich dem Gewichte des Halbbogens mit seiner Belastung und die letztere gleich dem horizontalen Schube am Schlußsteine ist; so folgt, daß alle Elemente zur Bestimmung der Stabilität der Widerlagsmauer bestimmt sind.

Man bemerkt, daß die Größe des horizontalen Schubes **P** auf einen jeden laufenden Fuß der Längenrichtung der Widerlagsmauer gefunden wird, wenn man den Werth von $\frac{P}{r^2}$ aus jenen Tabellen mit dem Quadrate des Halbmessers der inneren Wölbungslinie und mit dem Gewichte eines Kubikfußes der Gewölbmasse multiplizirt.

Zusätze zum vierten Abschnitte.

Anwendung der Gewölbtheorie auf Bögen von beliebigen Krümmungen.

Wenn in der Praxis die Aufgabe vorkommt, einen gegebenen Raum durch ein Gewölbe zu überspannen; so ist gewöhnlich die Weite des zu überspannenden Raumes, die Höhe der inneren Wölbungslinie bis unter den Schlußstein, die Form dieser Linie, die Art der Belastung der äußeren Wölbungslinie und die Höhe der Widerlagspfeiler bis auf das Fundament des Gewölbes im voraus bestimmt, und es handelt sich darum, die erforderliche Stärke des Bogens im Scheitel, sowie in den Anfängen und die Stärke des Pfeilers anzugeben und zu untersuchen, ob die Form der inneren Wölbungslinie von der Art ist, daß sich der Bogen mit seiner Belastung oberhalb der Anfänge im Gleichgewichte erhalten kann.

Was die Stärke des Gewölbes im Scheitel und in den Anfängen betrifft; so könnte man versuchen, dieselbe durch die Bedingung zu bestimmen, daß der Druck auf die Flächeneinheit der verschiedenen Fugenschnitte einen dem Materiale der Wölbsteine entsprechenden Werth nicht überschritte. Diesen Werth des Druckes auf die Flächeneinheit, welchem man die Wölbsteine in der Praxis ohne Bedenken aussetzen könnte, müßte man nothwendig aus der Erfahrung entlehnen, und dabei diejenigen Bauwerke dieser Art, deren Dimensionen sich im Laufe der Zeit als bewährt erwiesen haben, zum Maaßstabe wähle. Nimmt man jedoch hierzu die größeren Brückengewölbe, namentlich die von Perronet ausgeführten, bei denen der Druck auf den Quadratfuß der Fugenschnitte etwa dem Gewichte einer Säule desselben Materiales von Einem Quadratfuß Grundfläche und 200 bis 300 Fuß Höhe gleichkommt, und bedient sich dieses gewiß sehr geringen Werthes bei der Bestimmung der Bogenstärken kleinerer Gewölbe; so findet man ungemein schwache Dimensionen, die sich bei Gewölben von ganz ähnlichen Verhältnissen und 20 Fuß innerer Spannung auf etwa 3 Zoll reduziren. Obgleich man überzeugt sein kann, daß ein solches Gewölbe mit dieser geringen Bogenstärke keinen größeren Druck auf den Quadratfuß der Fugenschnitte auszuhalten hat, als den vorhin erwähnten; so würde man es doch sicherlich nicht wagen, einen Gewölbbogen in so geringer Stärke auszuführen. Der Bruch der Kante irgend eines Wölbsteines, welcher in den Punkten, wo die Mittellinie des Druckes die Wölbungslinien trifft, so leicht erfolgt, würde die daselbst befindliche Fugenfläche auf eine so unbedeutende Größe reduziren, daß der Einsturz des Gewölbes bei der geringsten Erschütterung zu befürchten stände. Außerdem leuchtet namentlich bei Brückengewölben ein, daß dieselben neben der erforderlichen Festigkeit des Materiales der Wölbsteine auch noch einen angemessenen Masseninhalt besitzen müssen, sodaß sie vermöge ihrer Trägheit im Stande sind, die Bewegungen, welche ihnen durch die Stöße der Fuhrwerke mitgetheilt werden, so sehr einzuschränken, daß dadurch kein vollständiger Einsturz herbeigeführt werden kann.

Erwägt man endlich noch, daß sich die Mittellinie des Druckes an mehreren Stellen des Gewölbes den Wölbungslinien bis zur Berührung nähert, sodaß hier durchaus keine gleichförmige Vertheilung des Druckes über den ganzen Fugenschnitt stattfinden kann, wie groß auch die Bogenstärke sein mag; so begreift man, daß die Bestimmung dieser Stärke unter der alleinigen Bedingung, daß der Druck zwischen den Wölbsteinen einer gegebenen Größe gleich sei, keine für die Praxis allgemein brauchbaren Resultate liefern kann, es sei denn, daß man den Werth des Druckes, welcher in den Fugenschnitten stattfinden soll, je nach den absoluten Verhältnissen der gegebenen Wölbungslinie und der Belastung variiren ließe, indem man denselben für die kleineren Gewölbe bedeutend geringer, als für die größeren, annähme. Man wird sich demnach bei der Bestimmung der Gewölbstärke vorzugsweise an diejenigen Regeln zu halten haben, welche sich aus den Dimensionen der bereits ausgeführten und als tüchtig befundenen Bauwerke ähnlicher Art ergeben.

Wenn man die Weite des Gewölbes zwischen den Widerlagen mit a und die Höhe desselben bis unter den Schlußstein mit h bezeichnet; so kann man die erforderliche Stärke c des Schlußsteines in rheinl. Fußen nach folgender empirischen Formel

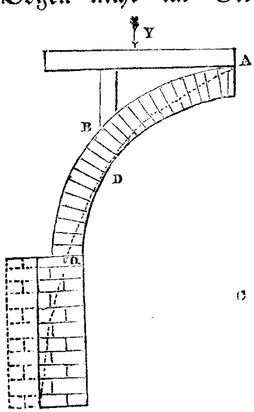
$$c = \frac{3}{100} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}{h + 3} + 1$$

bestimmen, welche sich sowol den in der Praxis üblichen Dimensionen der größeren, wie der kleineren Gewölbe möglichst nahe anschließt. Die hierdurch gefundene Stärke des Schlußsteines ist jedenfalls von der Art, daß wenn sich der Druck in den Fugen über die ganze Fugenfläche gleichförmig vertheilte (was übrigens nicht der Fall ist) ein Zerspringen der aus dem gewöhnlichen Baumateriale gefertigten Wölbsteine nicht zu befürchten stände. Bei den größeren Gewölben kommt es hauptsächlich darauf an, zu untersuchen, ob die Mittellinie des Druckes innerhalb der Gewölbstärke eine solche Lage hat, daß dadurch das Gleichgewicht des Bogens nicht gefährdet wird, und wenn man fände, daß Dies nicht der Fall ist; so würde man dennoch die Stärke des Schlußsteines beibehalten können, wenn man nach dem weiter unten anzugebenden Verfahren entweder die Krümmung der inneren Wölbungslinie änderte, oder die Stärke der Wölbsteine nach den Anfängen zu angemessen wachsen ließe.

Auch kommt es bei der Bestimmung der Gewölbstärke im Scheitel gar nicht so sehr auf die Höhe der Übermauerung oder der Belastung des Gewölbes durch Erdmassen an, vorausgesetzt, daß dieselbe nicht außergewöhnlich groß sei. Der hierdurch vermehrte Druck zwischen den Fugen würde immer noch weit von der Gränze entfernt sein, welcher man ein ähnliches Material unter anderen Umständen, z. B. in den Mauern hoher Thürme, aussetzt. Eine mäßige Belastung bei Gewölben, welche Erschütterungen ausgesetzt sind, wie die Brückengewölbe, wird sogar eher einen vortheilhaften, wie nachtheiligen Einfluß auf die Stabilität des Gewölbes äußern, indem dadurch die Wirkung der auf einzelne Punkte gerichteten Stöße mehr über den ganzen Bogen vertheilt wird, und überhaupt wegen der vermehrten Masse die durch irgend einen Stoß erzeugte Bewegung nicht so bedeutend ausfallen kann.

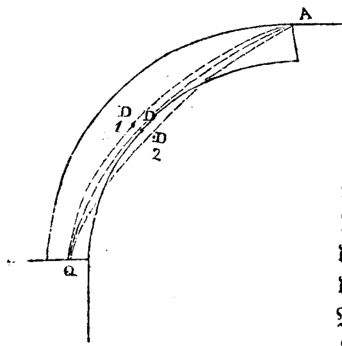
Nachdem man nun eine den Verhältnissen des zu konstruirenden Gewölbes entsprechende Bogenstärke angenommen hat, kann man durch folgendes Verfahren prüfen, ob das projektirte Gewölbe mit seiner Belastung fähig ist, sich über den Widerlagen im Gleichgewichte zu erhalten.

Betrachtet man einen beliebig belasteten Halbbogen, welcher in der Art zu brechen strebt, daß sich sein Scheitel senkt, während seine Schenkel nach außen gedrückt werden, und nimmt an, die Wölbsteine desselben seien ohne Mörtel versetzt; so wird die Mittellinie des Druckes durch den obersten Punkt A des Schlußsteines gehen und die innere Wölbungslinie in dem Brechungspunkte D berühren. Schneidet nun die Mittellinie des Druckes zwischen dem zuletzt genannten Punkte und der oberen Fläche der Widerlagsmauer die äußere Wölbungslinie; so wird der Bogen nicht im Gleichgewichte bleiben können: fällt jedoch



Q in den untersten Fugenschnitt; so wird das Gleichgewicht nicht gefährdet sein. Da alles Baumaterial nicht absolut fest ist; so ist es, streng genommen, unmöglich, daß die Mittellinie des Druckes irgendwo einen Punkt mit Einer der Wölbungslinien gemein habe, weil in diesem Punkte eine unendlich kleine Fläche des Materiales einen endlichen Druck zu ertragen haben würde. Hieraus folgt, daß in den Punkten A und D eine Zusammendrückung der Steinmasse stattfinden wird, in Folge welcher die Mittellinie des Druckes sich etwas von den Wölbungslinien nach der Mitte des Bogens zu entfernt. Man erkennt leicht, daß durch diesen Umstand der wahre Durchschnittspunkt Q der Mittellinie des Druckes mit der unteren Fugenfläche etwas weiter nach der äußeren Wölbungslinie zu fallen wird, als es sich ergibt, wenn man annimmt, daß die Mittellinie des Druckes genau durch die Punkte A und D ginge. Je näher ferner der Punkt Q der äußeren Wölbungslinie liegt, desto geringer ist die Stabilität des Gewölbbogens. Bestimmt man daher diesen Durchschnittspunkt unter der Voraussetzung, daß die Mittellinie des Druckes genau durch die Punkte A und D gehe; so wird es immer rathsam sein, die Form und Stärke des Bogens so zu wählen, daß der Punkt Q wenigstens um die Hälfte der unteren Bogenstärke von der äußeren Wölbungslinie absteht.

Um Dies zu erreichen, so nehme man den Punkt Q in der Mitte der unteren Gewölbstärke an, und konstruire nach der weiter unten anzugebenden Methode eine Mittellinie des Druckes, welche durch die beiden Punkte A und Q geht. Diese Linie wird die innere Wölbungslinie entweder bei D berühren, oder sie wird ganz in der Masse des Bogens liegen, wie die Linie AD_1Q oder die innere Wölbungslinie durchschneiden, wie die Linie AD_2Q. Findet der erste dieser drei Fälle statt; so ist ADQ die wahre Mittellinie des Druckes, und der Bogen hat die verlangte Stabilität.



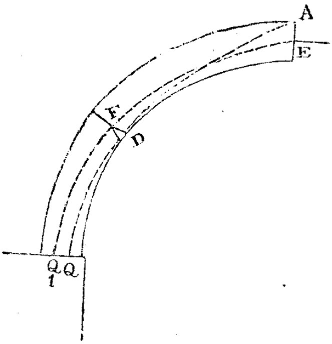
Findet Einer der beiden letzteren Fälle statt; so ist die ermittelte Linie nicht die in der Wirklichkeit vorhandene Mittellinie des Druckes, welche unter allen Umständen die Wölbungslinie berühren muß. In dem Falle jedoch, wo die Linie AD_1Q innerhalb der Masse des Bogens fällt, wird die wahre Mittellinie des Druckes die untere Fugenfläche in einem Punkte schneiden, welcher von der äußeren Wölbungslinie noch weiter absteht, als der angenommene Punkt Q, und hieraus folgt, daß der Bogen eine noch größere Stabilität besitzt, als verlangt wurde. In dem letzten Falle aber, wo die Linie AD_2Q die innere Wölbungslinie schneidet, wird die wahre Mittellinie des

Druckes durch einen Punkt der unteren Fugenfläche gehen, welcher der äußeren Wölbungslinie näher liegt, als die Mitte Q der unteren Bogenstärke, und man sieht sich alsdann genöthigt, entweder die Form der Wölbungslinie, oder die Bogenstärken so weit zu ändern, daß eine durch die Punkte A und Q gehende Mittellinie des Druckes die innere Wölbungslinie berührt.

Will man demnach die einmal angenommenen Bogenstärken unverändert beibehalten; so kann man der inneren Wölbungslinie eine solche Krümmung geben, daß dieselbe die Linie AD_2Q in irgend einem Punkte berührt. Die hierdurch eintretenden Veränderungen der auf das Gewölbe wirkenden Kräfte werden im Allgemeinen so gering sein, daß sie nur einen unbedeutenden Einfluß auf die Form der Mittellinie des Druckes AD_2Q haben werden, welche man, streng genommen, nach der Rektifikation der inneren Wölbungslinie nochmals durch die beiden Punkte A und Q verzeichnen müßte, um sich zu überzeugen, ob der veränderte Bogen nunmehr die verlangten Eigenschaften wirklich besitzt.

Will man dagegen die innere Wölbungslinie unverändert lassen; so muß entweder die untere Bogenstärke allein, oder dieselbe sammt der oberen Stärke angemessen vergrößert werden. Ermittelt man alsdann für den neuen Bogen nochmals eine Mittellinie des Druckes, welche durch den obersten Punkt A des Schlußsteines und die Mitte Q der unteren Bogenstärke geht; so wird man finden, ob die erwähnte Vergrößerung genügend gewesen ist, oder nicht. Zeigt es sich hierbei, daß die neuen Bogenstärken noch nicht groß genug sind; so hat man das obige Verfahren noch einmal zu wiederholen, oder nach Maaßgabe der Annäherung der Mittellinie des Druckes an die innere Wölbungslinie, welche man bei der ersten Veränderung der Bogenstärken beobachtet, die Bogenstärken zum zweiten Male näherungsweise zu korrigiren.

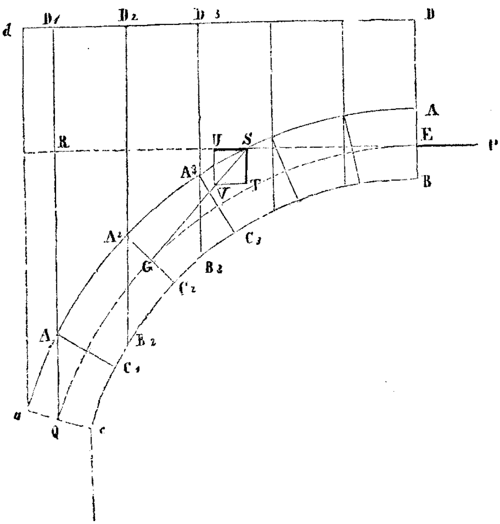
Wenn bei A oder D die Kante eines Wölbsteines absprängе; so wird es nicht möglich sein, daß die Mittellinie des Druckes genau durch diese Punkte ginge, dieselbe würde vielmehr bis zu den nächsten gemeinschaftlichen Berührungspunkten E oder F der beiden in den Fugen A oder D zusammenstoßenden Gewölbtheile in die Masse des Bogens zurückgedrängt werden, streng genommen, sogar noch etwas weiter, da jene Linie überhaupt nicht durch eine eigentliche Kante der Masse AQ gehen kann.



Hierdurch würde aber auch der Punkt Q der äußeren Wölbungslinie etwas näher gebracht werden und in Q_1 fallen, sodaß dadurch die Stabilität des Gewölbes offenbar vermindert würde. Um daher mit genügender Sicherheit zu Werke zu gehen; so möchte es rathsam sein, statt der vorhin bezeichneten Mittellinie ADQ eine solche Mittellinie des Druckes, wie EFQ_1 zu konstruiren, welche in E und Q_1 durch die Mitten der Fugenschnitte ginge, und alsdann das Gewölbe in der oben angedeuteten Weise nöthigenfalls so zu verändern, daß der Punkt F der Mittellinie des Druckes in der Nähe des Brechungspunktes in die Mitte der Bogenstärke fiele. Die wahre Mittellinie des Druckes ADQ würde alsdann, wenn sie genau durch die Punkte A und D ginge, die unterste Fuge in einem Punkte Q schneiden, welcher noch um etwas mehr, als die Hälfte der Bogenstärke, von der äußeren Wölbungslinie abstände, sodaß durch dieses Verfahren das Gewölbe eine noch größere Stabilität erhielte, als durch das vorhin angegebene.

Dies vorausgeschickt, so bleibt nur noch übrig, ein Verfahren anzugeben, durch welches man im Stande ist, eine Mittellinie des Druckes zu verzeichnen, welche durch zwei gegebene Punkte E und Q_1 geht.

Zu diesem Ende stelle ABQ das Profil des gegebenen Gewölbbogens und ADD_1A_1 das einer stetigen Belastung dar. Wenn die Belastung nicht aus demselben Materiale, wie der Gewölbbogen besteht; so wird man die Begränzungslinie DD_1, welche keineswegs gerade zu sein braucht, dergestalt konstruiren, daß immer das Gewicht eines Prismas von dem Materiale der Wölbsteine, dessen Grundfläche $D_2D_3A_3A_2$ und dessen Höhe gleich Einem Fuße ist, oder dessen Masse ebensoviel Kubikfuße, wie die Fläche $D_2D_3A_3A_2$ Quadratfuße enthält, gleich dem Gewichte der über dem Theile A_2A_3 der äußeren Wölbungslinie ruhenden Belastung ist. Wären außer der stetigen Belastung noch in einzelnen Punkten, wie z. B. in A_3, besondere Gewichte F angebracht; so könnte man dieselben durch Quadrate darstellen, deren Flächeneinheiten gleich den Kubikeinheiten eines Körpers von der Masse der Wölbsteine wären, welcher mit der in A_3 aufgesetzten Last ein gleiches Gewicht hätte.



Sind nun die Linien QD_1 und BD vertikal angenommen; so theile man den horizontalen Abstand D_1D in eine beliebige Anzahl gleicher Theile D_1D_2, D_2D_3 ꝛc. und ziehe die Vertikalen D_2B_2, D_3B_3, welche in D_2, D_3 ꝛc. die Begränzungslinie der Belastung und in B_2, B_3 ꝛc. die innere Wölbungslinie durchschneiden; ferner ziehe man durch die Punkte A_1, A_2, A_3 ꝛc. die Fugenschnitte A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 ꝛc.

Jetzt kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Masse, welche von oben her gegen irgend eine Fuge, wie A_2C_2, drückt, nicht $BDD_2A_2C_2$, sondern BDD_2B_2 sei, und es kommt darauf an, sowol deren Inhalt, wie den horizontalen Abstand ihres Schwerpunktes von der durch Q gelegten Vertikalen QD_1 und hieraus ihr Moment in Beziehung zum Punkte Q zu bestimmen. Wenn die Abstände D_1D_2, D_2D_3 ꝛc. nicht zu groß angenommen sind; so kann man die Flächen $D_2B_2B_3D_3$ wie Paralleltrapeze behandeln, und nachdem man die Linie D_2B_2 und D_3B_3 (oder auch die Länge der durch die Mitte von D_2D_3

gehenden Vertikalen) gemessen hat, ihren Inhalt nach der Formel $\frac{1}{2}(D_2 B_2 + D_3 B_3) \times \overline{D_2 D_3}$ berechnen. Ebenso kann man nach einer bekannten Formel den Abstand des Schwerpunktes des Trapezes $D_2 B_2 B_3 D_3$ von der Linie $D_2 B_2$ ermitteln. Dieser Abstand wird etwas geringer sein, als $\frac{1}{2}\overline{D_2 D_3}$: da aber, streng genommen, die dem Theile $C_2 C_3$ der inneren Wölbungslinie entsprechende Belastung $D_2 A_2 C_2 C_3 A_3 D_3$ ist, deren Schwerpunkt etwas weiter, als $\frac{1}{2} D_2 D_3$, von $D_2 B_2$ absteht; so kann man ohne wesentlichen Einfluß auf die Endresultate den Abstand des Schwerpunktes des Trapezes $D_2 B_2 B_3 D_3$ von $D_2 B_2$ gleich $\frac{1}{2} D_2 D_3$ setzen.

Zieht man endlich noch durch den tiefsten Punkt a der äußeren Wölbungslinie die Vertikale ad; so ergibt das rückwärts von Q liegende Trapez $dD_1 Qa$, welches in derselben Weise, wie die früheren, in Rechnung gebracht wird, die dem Bogentheile cC_1 entsprechende Belastung.

Bezeichnet man nun den Inhalt des rückwärts von Q liegenden Trapezes mit M′ und den horizontalen Abstand seines Schwerpunktes von Q oder die Hälfte der Linie $D_1 d$ mit l', ferner die vorwärts von Q liegenden Trapeze der Reihe nach mit $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ und die respektiven horizontalen Abstände der Schwerpunkte dieser Trapeze oder ihrer Mittellinien von dem Punkte Q mit $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$; so hat man zuvörderst für das Gewicht der ganzen Masse $BD\,dac$ den Ausdruck

$$M' + M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = M,$$

ferner für das Moment dieser Masse in Beziehung zum Punkte Q

$$l_1 M_1 + l_2 M_2 + l_3 M_3 + \ldots + l_n M_n - l' M' = lM,$$

worin l den horizontalen Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von Punkte Q bezeichnet.

Da die Masse M durch den in E wirkenden horizontalen Schub P im Gleichgewichte erhalten werden muß; so erhält man zur Bestimmung dieses Schubes P die Gleichung

$$pP = lM$$

oder

$$P = \frac{lM}{p},$$

worin p den vertikalen Abstand **QR** des Punktes **E** vom Punkte **Q** bezeichnet.

Wenn außer der stetigen Belastung noch einzelne Gewichte, wie etwa **F**, auf dem Gewölbe ruhen; so begreift man, daß dieselben und ihre Momente in ähnlicher Weise, wie die obigen Trapeze, mit in Rechnung gebracht werden müssen.

Um den Durchschnittspunkt **G** der Mittellinie des Druckes mit irgend einem Fugenschnitte $A_2 C_2$ zu konstruiren; so ist es nothwendig, den Inhalt der Masse $BD D_2 B_2$ und die Lage der durch ihren Schwerpunkt gehenden Vertikalen zu kennen. Für den Inhalt dieser Masse hat man aber den Ausdruck

$$M_2 + M_3 + \dots + M_n,$$

für ihr Moment in Beziehung zum Punkte **Q** den Ausdruck

$$l_2 M_2 + l_3 M_3 + \dots + l_n M_n,$$

und demnach ist der horizontale Abstand ihres Schwerpunktes von **Q** durch den Werth des Ausdruckes

$$\frac{l_2 M_2 + l_3 M_3 + \dots + l_n M_n}{M_2 + M_3 + \dots + M_n}$$

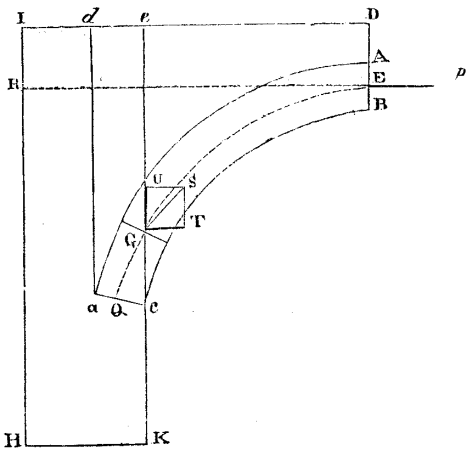
gegeben.

Macht man nun die Länge **RS** gleich diesem Abstande, zieht die Vertikale **ST**, schneidet auf derselben nach irgend einem Maaßstabe eine Länge **ST** ab, welche ebensoviel Längeneinheiten, wie die Figur BDD_2B_2 oder der Ausdruck $M_2 + M_3 + \dots + M_n$ Flächeneinheiten enthält, nimmt ferner die horizontale Linie **SU** nach demselben Maaßstabe von einer solchen Länge, daß sie ebensoviel Längeneinheiten, wie der obige Ausdruck von **P** Flächeneinheiten enthält, vollendet darauf über **ST** und **SU** das Rechteck **TU** und zieht die Diagonale **SV**; so wird dieselbe, genugsam verlängert, die Fuge $A_2 C_2$ in dem gesuchten Punkte **G** der Mittellinie des Druckes durchschneiden.

Wenn man, von dem Punkte **E** ausgehend, die verschiedenen Durchschnitte der Mittellinie des Druckes mit den sukzessiv aufeinander folgenden Fugenschnitten konstruiren will; so ergeben sich die Werthe der auf einem jeden Fugenschnitte ruhenden Gewichte und deren Momente in Beziehung zum Punkte **Q** durch allmählige Addition der Größen M_n, M_{n-1} 2c. und $l_n\ M_n,\ l_{n-1}\ M_{n-1}$ 2c., und hieraus findet man ohne Schwierigkeit nach der vorstehenden Formel die horizontalen Abstände der Schwerpunkte dieser Gewichte vom Punkte Q, mit Hülfe deren man für einen jeden Fugenschnitt das entsprechende Rechteck **TU** und dessen Diagonale **SG** konstruiren kann.

Nachdem man nun nach Maaßgabe der so erhaltenen Mittellinie des Druckes **EQ** dem Gewölbe entweder durch eine angemessene Veränderung der Bogenstärken oder der Krümmung der Wölbungslinien eine solche Form gegeben hat, daß dasselbe im Stande ist, sich und die Belastung mit dem gewünschten Grade von Stabilität im Gleichgewichte zu erhalten, so ist die erforderliche Stärke der Widerlagsmauer zu bestimmen.

Zu diesem Ende ziehe man durch den Anfang *c* der inneren Wölbungslinie die Vertikale *ce*, und betrachte das Trapez *ceda* als mit zu der Widerlage gehörig. Ist nun G der Durch-



schnittspunkt dieser Vertikalen mit der Mittellinie des Druckes, für welche man ohne Bedenken die vorhin konstruirte Linie **EQ** annehmen kann; so geht die gegen die Widerlagsmauer wirkende Kraft **SG** durch jenen Punkt, und man hat für die vertikale Komponente **UG** derselben das Gewicht der Masse **DB***ec* und für die horizontale Komponente TG den Schub P. Bezeichnet man daher den Inhalt des Trapezes *ceda* mit M″; so ist jene vertikale Komponente durch M—M″ dargestellt, worin M den früheren Werth des Inhaltes von DB*cad* bezeichnet.

Jetzt sei HK*e*J das Profil einer lothrechten Widerlagsmauer mit Einschluß der auf derselben ruhenden Belastung. Bezeichnet man die Höhe KG des Punktes G über K mit k, die Höhe HJ der Widerlagsmauer mit h und die Stärke HK derselben mit a; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, wenn die Mauer gerade eine solche Stärke haben soll, daß sie eben noch im Stande ist, das Gewölbe aufrecht zu erhalten, oder daß die Mittellinie des Druckes durch die Kante H geht,

$$\tfrac{1}{2}a.ah + a(\mathrm{M}-\mathrm{M}'') = k\mathrm{P}.$$

Hieraus folgt zur Bestimmung der Stärke a

$$a = -\frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}''}{h} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}''}{h}\right)^2 + \frac{2k\mathrm{P}}{h}}.$$

Wollte man, ohne den Durchschnittspunkt G der Kurve EQ mit der Vertikalen *ce* zu konstruiren, die Stärke a der Widerlage mit Hülfe der bereits früher berechneten Größen bestimmen; so hätte man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, wenn man die Momente aller auf die Masse DB*c*KHJ wirkenden Kräfte in Beziehung zum Punkte H nimmt, zu setzen

Mom. von HK*e*J + Mom. von DB*cad* – Mom. von *ecad* = Mom. von P.

Es ist aber

Mom. von HK*e*J $= \frac{a}{2} \cdot ah = \frac{a^2 h}{2}$,

Mom. von DB*cad* $= (a - 2l' + l)\mathrm{M}$, wenn man sich erinnert, daß $2l' = \frac{1}{2}de$ und $l =$ dem horizontalen Abstande des Schwerpunktes der Masse M vom Punkte Q ist,

Mom. von *ecad* $= (a - 2l')\mathrm{M}''$ und

Mom. von P $= q\,\mathrm{P}$,

worin q den vertikalen Abstand HR der Richtung der horizontalen Kraft P vom Punkte H bezeichnet. Demnach ist

$$\frac{a^2 h}{2} + (a - 2l' + l)M - (a - 2l')\,M'' = q\,P,$$

und hieraus folgt

$$a = -\frac{M - M''}{h} + \sqrt{\left(\frac{M - M''}{h}\right)^2 + \frac{4l'(M - M'')}{h} - \frac{2lM}{h} + \frac{2qP}{h}},$$

worin die Größen M, lM, und P bereits durch die vorhergehende Untersuchung bestimmt sind und M'' gleich dem Inhalte des Trapezes *ceda* und $4l'$ gleich dessen Breite *de* ist.

Da es für die praktische Anwendung nicht hinreichend ist, daß die Widerlagsmauer nur gerade so viel Stabilität besitze, als zur Aufrechterhaltung des Gewölbes erfordert wird; so muß man diese Mauer wenigstens um $\frac{1}{3}$ des Werthes stärker machen, welcher sich für a aus der Berechnung der vorstehenden Formel ergibt. Außerdem ist es bei jeder größeren Brückenanlage nothwendig, daß man den Zug der Mittellinie des Druckes bis zum tiefsten Punkte des Fundamentes verfolge, um sich zu überzeugen, ob dieselbe auch das Fundament in derjenigen Fläche durchschneidet, welche dem Letzteren zur Grundfläche dienen soll. Denn wäre Dies nicht der Fall; so würde das Fundament ein Bestreben haben, sich um die äußerste Kante zu drehen, und könnte, wenn der Seitendruck der umgebenden Erde oder sonstigen Masse nicht stark genug wäre, den Einsturz des Gewölbes herbeiführen.

Wenn der Untergrund in vertikaler Richtung zusammendrückbar wäre, wie Dies in alle den Fällen vorausgesetzt wird, wo man das Fundament auf einem liegenden Roste aufführt; so müßte die untere Breite des Fundamentes durch die Bedingung bestimmt werden, daß die Resultante aller auf die Oberfläche des Rostes wirkenden Kräfte durch die Mitte derselben ginge, weil nur unter dieser Bedingung ein gleichförmiges Niedersinken des ganzen Bauwerkes herbeigeführt werden könnte. Nimmt man nun an, die Widerlagsmauer sei vertikal, und das Fundament springe auf beiden Seiten derselben um gleich viel vor; so leuchtet ein, daß der Schwerpunkt der Widerlagsmauer und des Fundamentes in einer durch die Mitte der Grundfläche des Letzteren gehenden Vertikalen liegt, und daß demnach nur dafür gesorgt zu werden braucht, daß die Resultante des Gewichtes von DBce und der Kraft P oder daß die Richtung der Linie SG die Grundfläche des Fundamentes ebenfalls in der Mitte durchschneide. Nimmt man daher die Momente dieser beiden Kräfte in Beziehung zu der Mitte der Grundfläche des Fundamentes, indem man die Tiefe des Letzteren unter dem Punkte H mit h_1 bezeichnet; so ergibt sich die Gleichung

$$(\tfrac{1}{2}a - 2l' + l)\mathrm{M} - (\tfrac{1}{2}a - 2l')\mathrm{M}'' = (h_1 + q)\mathrm{P},$$

und hieraus folgt für die Stärke der Widerlagsmauer HK, über welche das Fundament zu beiden Seiten um gleich viel vorspringt,

$$a = 2\left[2l' + \frac{(h_1 + q)\mathrm{P} - l\mathrm{M}}{\mathrm{M} - \mathrm{M}''}\right].$$

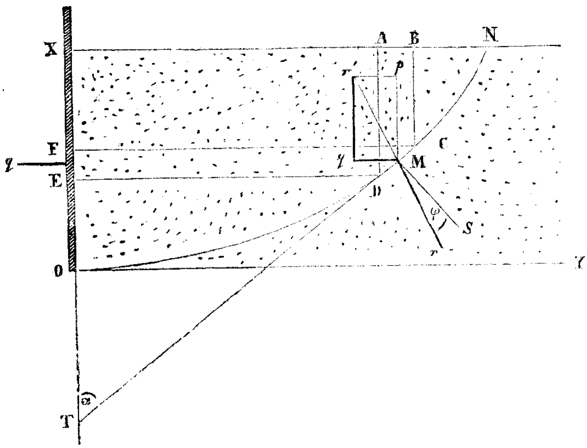
Bemerkungen über das Erdprisma vom größten Drucke.

In §. 321 hat man gesehen, daß eine Erdmasse, welche durch eine vertikale Wand aufrecht erhalten wird, gegen die Letztere einen horizontalen Druck ausübt, und da die Erde ein Bestreben haben kann, in der Richtung von beliebigen Durchschnittsflächen herabzugleiten, für welche sich ebenso viel verschiedene Pressungen gegen die vertikale Wand ergeben würden; so ist daselbst diejenige Durchschnittsfläche ermittelt, für welche das Bestreben der Erde herabzugleiten am größten, und demnach der horizontale Schub am stärksten ist. Der durch diese Fläche begränzte keilförmige Erdkörper bildet das Prisma vom größten Drucke.

Bei jener Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, daß der Bruch der Erde stets in einer ebenen Fläche zu erfolgen das größte Bestreben habe, und das Maximum des horizontalen Schubes ist immer nur für solche Massen ermittelt, welche nach unten durch eine geneigte Ebene begränzt waren. Da es jedoch möglich wäre, daß eine durch eine gekrümmte Grundfläche begränzte Erdmasse einen noch stärkeren Schub erzeugte; so soll im Folgenden der horizontale Druck bestimmt werden, welchen eine Erdmasse von beliebiger Grundfläche gegen eine vertikale Wand ausübt, um alsdann aus der sich ergebenden allgemeinen Gleichung die Bedingungen abzuleiten, welchen die Form jener

Fläche entsprechen muß, damit der horizontale Druck ein Maximum werde.

Demnach sei **YOXN** das Profil einer Erdmasse mit horizontaler Oberfläche und **OX** die vertikale Wand, welche sich dem Herabgleiten derselben in horizontaler Richtung widersetzt.



OMN sei das Profil irgend einer stetig gekrümmten Durchschnittsfläche, welche durch den Punkt **O** geht. Nimmt man die Richtungen **OX** und **OY** zu Koordinatenaxen an; so sei die Linie **OMN** allgemein durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

dargestellt. Denkt man sich nun die Masse **ONX** in lauter unendlich schmale Prismen **ABCD** zerlegt, deren Seiten **AD** und **BC** vertikal sind; so ruhet auf einem jeden Kurvenelemente, wie **CD**, das Gewicht p eines Prismas **ABCD**. Dasselbe wird durch den Widerstand r der Fläche **CD** und durch den horizontalen Widerstand q des Theiles **EF** der festen Wand im Gleichgewichte erhalten. Wenn das Prisma **ABCD** im Begriffe wäre, auf **CD** zu gleiten; so würde die Richtung des Widerstandes r gegen die Normale **MS** auf der Fläche **CD** unter dem Reibungswinkel $r\mathbf{MS} = \varphi$, welcher dem Gleiten der Massentheilchen der Erde aufeinander entspricht, geneigt sein. Nach dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes (§. 334) wird die Fläche CD aber auch in einem jeden anderen Zustande der Ruhe in dieser Richtung rM Widerstand leisten, weil dieselbe von allen anderen Richtungen, in denen die Fläche CD Widerstand zu leisten vermag, diejenige ist, welche der vertikalen Richtung oder der Richtung der Kraft p am nächsten kommt. Da nun die drei Kräfte p, q und r miteinander im Gleichgewichte sein müssen; so hat man, wenn man rM bis r' verlängert und über p und q das Rechteck $p\mathrm{M}qr'$ entwirft,

$$\frac{q}{p}=\operatorname{tang} r'\mathrm{M}p.$$

Zieht man durch den Punkt M an die Kurve OMN die Tangente MT, von welcher das Kurvenelement CD einen Theil ausmacht, und bezeichnet den Neigungswinkel MTX dieser Tangente gegen die Abzissenaxe OX mit α; so findet man leicht, daß $< r'\mathrm{M}p=\frac{\pi}{2}-(\varphi+\alpha)$, also

$$\frac{q}{p}=\cot(\varphi+\alpha)=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\alpha}$$

und

$$q=p\,\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\alpha}$$

ist. Bezeichnet man die Höhe OX der gesammten Erdmasse mit a und das Gewicht Eines Kubikfußes der Erdmasse mit μ; so erhält man für das Gewicht eines Prismas ABCD, dessen Dimension in perpendikularer Richtung zu der Ebene XY Einen Fuß beträgt, $p=\mu(a-x)\,.\,dy$, und da außerdem $\operatorname{tang}\alpha=\frac{dy}{dx}$ ist; so wird der vorstehende Ausdruck

$$q=\mu(a-x)\,dy\left(\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\frac{dy}{dx}}{\operatorname{tang}\varphi+\frac{dy}{dx}}\right)$$

$$=\mu\,(a-x)\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,\frac{dy}{dx}}{\operatorname{tang}\varphi+\frac{dy}{dx}}\right)dx.$$

Hieraus folgt für den horizontalen Schub der ganzen Erdmasse ONX

$$Q = \mu \int_0^a (a-x)\frac{dy}{dx}\left(\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{dy}{dx}}{\operatorname{tang}\varphi+\frac{dy}{dx}}\right)dx.$$

Um die Bedingungen zu ermitteln, welchen die Form der Kurre OMN oder die Funktion $y = f(x)$ entsprechen muß, damit der vorstehende Ausdruck ein Maximum werde; so setze man der Kürze wegen $\operatorname{tang}\varphi = \beta$ und $\frac{dy}{dx} = y'$: alsdann hat man

$$Q = \mu \int_0^a (a-x)\,y'\left(\frac{1-\beta y'}{\beta+y'}\right)dx.$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man, wenn das endliche Integral $\int_0^a V\,dx$, worin V eine Funktion der Veränderlichen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ ꝛc. bezeichnet, ein Maximum werden soll, zuvörderst die allgemeine Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + etc = o$$

zu setzen, worin N, P, Q, R ꝛc. die Differenzialkoefficienten der Funktion V resp. in Beziehung zu den Veränderlichen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ ꝛc. bezeichnen. Da nun in dem vorliegenden Falle $N = o$, und auch $Q = o$, $R = o$ ꝛc. ist und nach gehöriger Reduktion $P = \frac{dV}{dy'} = \frac{\beta(a-x)}{(\beta+y')^2}(1 - 2\beta y' - y'^2)$ gefunden wird; so reduzirt sich die obige allgemeine Gleichung auf

$$-\frac{dP}{dx} = o.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$P = const.,$$

d. i., wenn man für P den vorstehenden Werth setzt,

$$\frac{\beta(a-x)}{(\beta+y')^2}(1-2\beta y'-y'^2)=const.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung für $x=a$ nothwendig den Werth null annimmt; so folgt, daß $const.=o$ sein muß. (Welches auch der Werth von y' oder $\frac{dy}{dx}$ sei, so sieht man leicht ein, daß derselbe für $x=a$ unmöglich $=-\beta$ werden könnte, sodaß durch die Substitution von $x=a$ die linke Seite der vorstehenden Gleichung den unbestimmten Werth $\frac{o}{o}$ annähme.) Setzt man demnach $const.=o$ und dividirt durch den Faktor $\frac{\beta(\alpha-x)}{(\beta+y')^2}$ welcher offenbar nicht $=o$ gesetzt werden kann; so kommt

$$1-2\beta y'-y'^2=o,$$

woraus

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\beta+\sqrt{1+\beta^2}$$

folgt. Es leuchtet ein, daß die Wurzelgröße in diesem Ausdrucke nur positiv genommen werden darf, da ein negativer Werth von $\frac{dy}{dx}$ eine Linie darstellen würde, welche unterhalb der Abszissenaxe OY läge.

Aus der letzteren Gleichung folgt durch Integration

$$y=(-\beta+\sqrt{1+\beta^2})x+const.,$$

und da für $x=o$ auch $y=o$ sein muß,

$$y=(-\beta+\sqrt{1+\beta^2})x.$$

Durch diese Gleichung wird offenbar eine durch den Punkt O gehende gerade Linie dargestellt. Um die Richtung derselben zu bestimmen; so hat man, wenn man für β wiederum seinen Werth tang φ substituirt,

$$y = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\, x\,,$$

oder da

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,,\; 1 = \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

also

$$1 - \sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

und

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist,

$$y = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}\, x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

oder weil

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$$

ist,

$$y = x\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = x\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Aus der vorstehenden Untersuchung geht also hervor, daß die Grundfläche des Prismas vom größten Drucke nothwendig eine Ebene ist, welche sich unter dem Winkel $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ gegen die Vertikale neigt.

Für den elementaren horizontalen Schub q, welcher durch das Bestreben des Prismas **ABCD**, auf der Fläche **CD** herabzugleiten, erzeugt wird, hat man nach dem Früheren

$$q = \mu\,(a - x)\,\frac{dy}{dx}\cot(\varphi + \alpha)\,.\,dx,$$

d. i., wenn man

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \text{ und } \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

setzt,

$$q = \mu(a-x)\,\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\,dx = \mu\,(a-x)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).\,dx,$$

und demnach für den gesammten Druck der Erde gegen die vertikale Wand O X

$$Q = \int_0^a \mu(a-x)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).\,dx = \tfrac{1}{2}\mu a^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Da das Moment des elementaren Druckes q in Beziehung zum Punkte O

$$x q = \mu x (a-x)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) d x$$

ist; so ergibt sich für das Moment des gesammten Druckes

$$XQ = \int_0^a \mu x (a-x)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).\,dx = \tfrac{1}{6}\mu a^3 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

worin X den Abstand des Angriffspunktes der Resultante Q aller Elementarpressungen gegen die Wand OX bezeichnet. Aus dem letzteren Ausdrucke und dem für Q folgt endlich

$$X = \tfrac{1}{3}\,a.$$

Alle diese Resultate stimmen mit den in §. 321 und 322 erhaltenen vollkommen überein.

Fünfter Abschnitt.

Von der Festigkeit der Materialien.

Elastizität.

§. 347. Aus zahlreichen Versuchen, welche über die Ausdehnung, Biegung und Torsion starrer Körper unter der Einwirkung gegebener Kräfte angestellt sind, scheint hervorzugehen, daß die Verrückung der Massentheilchen dieser Körper folgenden Gesetzen unterworfen ist.

1) Wenn die Verrückung durch Ausdehnung eine gewisse Gränze nicht überschreitet; so strebt ein jedes Massentheilchen, in seinen früheren Platz mit einer Kraft zurückzukehren, welche dem Abstande genau proportional ist, um den dasselbe verrückt worden ist.

2) Um den Abstand α, in welchem sich zwei Massentheilchen im natürlichen Zustande des Körpers befinden, durch Zusammendrückung auf $\frac{1}{n}\alpha$ zu reduziren, ohne dabei eine gewisse Gränze der Verrückung zu überschreiten, ist dieselbe Kraft erforderlich, als um jenen natürlichen Abstand α durch Ausdehnung auf $n\alpha$ zu bringen.

3) Wenn die Verrückung durch Ausdehnung oder Zusammendrückung über eine gewisse Gränze gesteigert wird; so verbleibt das Theilchen entweder ruhig in der neuen Lage, oder es nimmt nach einiger Zeit eine andere Lage an, welche von der ursprünglichen verschieden ist.

Das durch die ersten beiden dieser Gesetze ausgedrückte Bestreben der Theilchen irgend einer endlichen Masse, in die Lage zurückzukehren, welche sie vor der Verrückung gegeneinander einnahmen, heißt **Elastizität**. Man hat allen Grund, zu glauben, daß dieses Bestreben innerhalb der durch das dritte Gesetz bezeichneten Gränzen allen Körpern zukommt. Jedoch sind die Gränzen, zwischen denen dasselbe für verschiedene Körper Gültigkeit behält, je nach der physischen Beschaffenheit der Masse der Körper verschieden.

Da die Kraft, mit welcher ein jedes einzelne Massentheilchen eines Körpers in die Lage zurückzukehren strebt, aus welcher es verrückt wurde, mit der Verrückung selbst in den obigen Verhältnissen variirt; so folgt, daß die Kraft, mit welcher irgend eine **Summe** solcher Theilchen, die den endlichen Theil eines Körpers ausmacht, ihre frühere Form wieder anzunehmen strebt, nachdem sie innerhalb der Gränzen der Elastizität entweder ausgedehnt oder zusammengedrückt ist, d. h. die Kraft, welche erforderlich ist, um den Körper in dem Zustande der Ausdehnung oder Zusammendrückung zu erhalten, mit dem Betrage dieser gesammten Ausdehnung oder Zusammendrückung im Vergleich zu dem ursprünglichen Rauminhalte in derselben Weise variirt, wie die Kraft, welche im Stande ist, eine gleiche verhältnißmäßige Vergrößerung oder Verkleinerung des ursprünglichen Abstandes α zweier Theilchen zu bewirken. Dieses Gesetz, in welchem die **vollkommene** Elastizität besteht, und welches sowol für Flüssigkeiten und Gase, wie für starre Körper gilt, scheint zuerst durch die direkten Versuche von Gravesande über die Ausdehnung dünner Dräthe dargethan zu sein. Durch die Erscheinungen der Biegung und Torsion ist man jedoch am leichtesten im Stande, nachzuweisen, daß dieses Gesetz das charakteristische Kennzeichen der Elastizität der Materie in allen ihren körperlichen Formen innerhalb gewisser Gränzen der Verrückung ihrer Elemente, oder innerhalb der sogenannten **Elastizitätsgränzen**, bildet.

Ausdehnung und Zusammendrückung in der Richtung der Länge.

§. 348. **Bestimmung der Längen-Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Stabes von gegebenem Querschnitte unter der Wirkung einer gegebenen Kraft.**

Es bezeichne

K den Querschnitt des prismatischen Körpers oder Stabes in Quadratzollen,

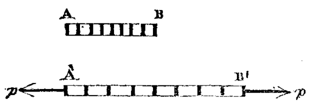
L die Länge desselben im natürlichen Zustande in Fußen,

l die Ausdehnung oder Zusammendrückung desselben in Fußen unter der Wirkung der Kraft

P, welche in Pfunden gegeben sei, sodaß die Länge L_1 des Stabes nach der Ausdehnung oder Zusammendrückung resp. $L_1 = L + l$ oder $L_1 = L - l$ ist. Außerdem sei

E die Kraft in Pfunden, welche erforderlich sein würde, um einen Stab von demselben Materiale und von Einem Quadratzoll Querschnitt um seine doppelte Länge auszudehnen, oder um seine halbe Länge zusammenzudrücken, wenn die Elastizitätsgränzen des Materiales von der Art wären, daß sie eine solche Ausdehnung oder Zusammendrückung gestatteten, ohne daß sich dabei das Gesetz der Elastizität änderte.

Die Größe **E** hängt offenbar nur von der physischen Beschaffenheit des Materiales, aus welchem der Stab besteht, und keinesweges von der absoluten Länge desselben ab, sodaß Ein und dieselbe Kraft erfordert wird, um einen Stab von jeder beliebigen Länge, vorausgesetzt, daß sein Querschnitt derselbe sei, im Zustande seiner doppelten Verlängerung oder Verkürzung zu erhalten. Denn betrachtet man irgend eine Längenfiber **AB** eines



Stabes von beliebiger Länge im natürlichen Zustande der Ruhe; so werden die Mitten der einzelnen Massentheilchen dieser Fiber um eine konstante Entfernung α voneinander abstehen, in welcher sie durch die Kohäsionskraft der Materie erhalten werden. Wird nun die Fiber um das Doppelte verlängert oder verkürzt; so werden sich auch jene Abstände der Massentheilchen von Mitte zu Mitte um das Doppelte vermehren oder vermindern und demnach wieder für alle Fibern von jeder beliebigen absoluten Länge einen konstanten Werth resp. 2α oder $\frac{1}{2}\alpha$ annehmen. Nach den ersten beiden Gesetze des vorhergehenden Paragraphes wird demnach ein jedes Massentheilchen einer um das Doppelte verlängerten oder verkürzten Fiber dasselbe Bestreben haben, seinen früheren Platz einzunehmen, gleich=

viel, welche absolute Länge die Fiber in ihrem natürlichen Zustande hatte. Die aus diesem Bestreben hervorgehenden reziproken Anziehungskräfte der Massentheilchen, wenn die Fiber ausgedehnt ist, oder Abstoßungskräfte, wenn sie zusammengedrückt ist, vernichten sich für alle zwischen den beiden Endelementen liegenden Theilchen gegenseitig: um aber die beiden Endelemente **A′** und **B′** in Ruhe und damit den ganzen Stab im Zustande der Ausdehnung oder Zusammendrückung zu erhalten, muß an einem jeden derselben eine Kraft p angebracht werden, welche im Stande ist, dem Bestreben eines jeden dieser Elemente, seine frühere Lage in Beziehung zu dem nächstfolgenden Massentheilchen wiedereinzunehmen, den nöthigen Widerstand entgegenzusetzen. Aus dem Vorstehenden geht nun hervor, daß diese Kraft p und demnach auch die Größe **E** konstant ist, welches auch die absolute Länge des um die doppelte Länge ausgedehnten oder zusammengedrückten Stabes gewesen sein möge. Allgemein bemerkt man, daß immer Ein und dieselbe Kraft erforderlich ist, um zwei Stäbe von einerlei Querschnitte, welche in demselben Verhältnisse zu ihrer ursprünglichen Länge ausgedehnt oder zusammengedrückt sind, in dem Zustande der Spannung zu erhalten.

Betrachten wir nun zuvörderst den Fall, wo ein Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt und **L** Fuß Länge durch die Wirkung einer an seinen beiden Enden angebrachten Kraft p bis zu der Länge L_1 ausgedehnt werden soll. Diese Kraft wächst nach dem ersten Gesetze in direktem Verhältnisse mit der Entfernung, um welche je zwei Theilchen bei der Ausdehnung weiter voneinander verrückt sind, und ist $= E$, wenn diese Verrückung dem Abstande gleich ist, in welchem sich die Theilchen im ursprünglichen Zustande voneinander befanden. Da sich nun die Zunahmen dieser Entfernung ebenso zueinander verhalten, wie die Längenzunahmen des ganzen Stabes, die gesammte Längenzunahme des ausgedehnten Stabes aber $L_1 - L$ ist, während eine Längenzunahme um **L** eine Kraft $= E$ bedingt; so hat man offenbar

$$p = \frac{L_1 - L}{L} \cdot E .$$

Was den Fall betrifft, wo der Stab von der natürlichen Länge **L** bis auf die Länge L_1 zusammengedrückt werden soll;

so ist hierzu nach dem zweiten Gesetze eine Kraft gleich der erforderlich, welche im Stande sein würde, einen Stab von der natürlichen Länge L_1 bis auf die Länge L auszudehnen. Unter Berücksichtigung der vorstehenden Gleichung hat man demnach für die gesuchte Kraft p, welche den Stab von L Fuß natürlicher Länge bis auf L_1 Fuß Länge zusammenzudrücken fähig ist,

$$p = \frac{L - L_1}{L_1} . E .$$

Wenn der Querschnitt des Stabes nicht Einen, sondern K Quadratzoll beträgt; so ist zu der Bewirkung derselben Effekte, wie vorhin, offenbar eine Kraft $P = Kp$ erforderlich, und man hat daher für den Fall der Ausdehnung

$$P = KE\frac{L_1 - L}{L} = KE\frac{l}{L} \quad \dots . (490)$$

und für den Fall der Zusammendrückung

$$P = KE\frac{L - L_1}{L_1} = KE\frac{l}{L - l} \quad \dots . (490^a).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich für die Länge L_1, wenn der Stab ausgedehnt ist, und für die Verlängerung $l = L_1 - L$ die Werthe

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \left(\dfrac{P + KE}{KE}\right) L \\ \text{und} \\ l = \dfrac{P}{KE} L \end{array}\right\} , \dots (490)$$

ebenso für die Länge L_1, wenn der Stab zusammengedrückt ist, und für die Verkürzung $l = L - L_1$ die Werthe

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \dfrac{KE}{P + KE} L \\ \text{und} \\ l = \dfrac{P}{P + KE} L \end{array}\right\} \dots . (490^a).$$

Die Kraft E, welche im Stande ist, einen Stab aus gegebenem Materiale von Einem Quadratzoll Querschnitt auf die doppelte Länge auszudehnen oder auf die halbe Länge zusammenzudrücken, nennt man den Elastizitätsmodel. Man findet ihre Werthe für die wichtigsten in Konstruktionen vorkommenden Materialien in einer diesem Werke angehängten Tabelle verzeichnet.

Wollte man den Werth des Elastizitätsmodels E für irgend ein Material durch Versuche bestimmen; so könnte Dies auf zweierlei Weise geschehen. Ein Mal dadurch, daß man die Kraft p_2 beobachtete, welche im Stande wäre, einen Stab jenes Materiales von Einem Quadratzoll Querschnitt und L Fuß ursprünglicher Länge bis auf die Länge L_2 auszudehnen. Man hätte alsdann nach den obigen Gleichungen

$$p_2 = E\frac{L_2 - L}{L} \text{ und demnach } E = p_2\frac{L}{L_2 - L}.$$

Der Werth einer andern Kraft p_1, welche im Stande wäre, denselben Stab von der ursprünglichen Länge L bis zu der Länge L_1 auszudehnen, würde alsdann sein

$$p_1 = E\frac{L_1 - L}{L} = p_2\frac{L_1 - L}{L_2 - L} = p_2\frac{l_1}{l_2},$$

wenn man mit l_1 und l_2 die Verlängerungen des Stabes in den beiden Fällen bezeichnet. Hätte man die beiden ausdehnenden Kräfte p_1 und p_2 und die entsprechenden absoluten L_1 und L_2 des Stabes beobachtet; so würde die Formel

$$L = \frac{p_1 L_2 - p_2 L_1}{p_1 - p_2}$$

die Länge L des Stabes in seinem natürlichen Zustande ergeben.

Ein anderes Mal könnte man den Werth von E dadurch ermitteln, daß man die Kraft p_2 beobachtete, welche fähig wäre, den Stab von der Länge L bis auf die Länge L_2 zusammenzudrücken. Man würde alsdann

$$p_2 = E\frac{L - L_2}{L_2}, \text{ also } E = p_2\frac{L_2}{L - L_2}$$

haben, und demnach für eine andere Kraft p_1, welche denselben Stab von der ursprünglichen Länge L bis zur Länge L_1 zusammenzudrücken fähig wäre,

$$p_1 = E\frac{L - L_1}{L_1} = p_2 \frac{L_2}{L_1}\frac{L - L_1}{L - L_2}.$$

Wollte man die letztere Bestimmungsweise des Werthes von E auf gasförmige Körper anwenden, für welche die obigen Gesetze der Elastizität ebenfalls Gültigkeit haben; so müßte man zuvörderst bemerken, daß diese Körper vermöge ihrer Expansionskraft ein Bestreben haben, sich bis ins Unendliche auszudehnen, sodaß die Länge L eines Gasstabes in seinem natürlichen Zustande unendlich groß sein würde. Hiernach ergebe sich für den Elastizitätsmodel E der Werth $p_2\frac{L_2}{L - L_2} = p_2\frac{L_2}{\infty - L_2} = o.$

Betrachtet man nun aber die vorstehende Formel $p_1 = p_2\frac{L_2}{L_1}\frac{L - L_1}{L - L_2}$, welche die Kraft p_1 darstellt, die im Stande ist, den Gasstab auf der Länge L_1 zu erhalten; so findet man, daß das Verhältniß $\frac{L - L_1}{L - L_2}$, worin L_1 und L_2 endliche Größen sind, L aber den Werth ∞ hat, nothwendig gleich der Einheit ist, sodaß man für gasförmige Körper das bekannte Mariottesche Gesetz

$$p_1 = p_2\frac{L_2}{L_1} \text{ oder } \frac{p_1}{p_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

erhält, nach welchem die Spannungen p_1 und p_2 derselben im umgekehrten Verhältnisse ihrer absoluten Rauminhalte L_1 und L_2 variiren. Gäbe es jedoch für die Gase eine gewisse Gränze der Ausdehnung, für welche dieselben keine Expansionskraft mehr besäßen, hätte also L irgend einen bestimmten, wenn auch noch so großen Werth, und behielten die obigen Gesetze der Elastizität bis zu jener Gränze volle Gültigkeit; so zeigt die Formel $p_1 = p_2\frac{L_2}{L_1}\frac{L - L_1}{L - L_2}$, daß die Spannung p_1 in der Nähe jener Gränze etwas schwächer variirt, als das Umgekehrte $\frac{1}{L_1}$ des Volums L_1.

Auch bemerkt man, daß man aus der Beobachtung der beiden zusammendrückenden Kräfte p_1 und p_2 und der entsprechen- Länge L_1 und L_2 die Länge L des Stabes in seinem natürlichen Zustande durch die Formel $L = \frac{(p_1 - p_2) L_1 L_2}{p_1 L_1 - p_2 L_2}$ berechnen könnte.

Der natürliche Zustand eines Stabes ist derjenige, in welchem er sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte bloß vermöge der inneren Anziehungs- und Abstoßungskräfte seiner Massentheilchen auf einer bestimmten Länge L erhält. Wird dieser Stab durch die Einwirkung einer äußeren Kraft p_1 bis zu der Länge L_1 ausgedehnt oder zusammengedrückt; so erzeugen sich zwischen seinen einzelnen Theilchen in der Längenrichtung Spannungen, welche der Kraft p_1 gleich und entgegengesetzt sind, weil diese Kraft zur Herstellung des Gleichgewichtes nothwendig ist. Auf einen so veränderten Stab könnte man natürlich die obigen Formeln nicht beziehen, um daraus die Variationen seiner Länge unter der Einwirkung neuer Kräfte zu bestimmen; man müßte vielmehr behuf dieser Bestimmung immer die gesammte Veränderung betrachten, welche die ursprüngliche Länge L des Stabes in seinem natürlichen Zustande unter der Einwirkung der ersteren Kraft p_1 plus der neu hinzukommenden Kraft erleiden würde.

Anders ist Dies, wenn der Stab durch die Wirkung innerer Ursachen, welche im Stande sind, die Anziehungs- oder Abstoßungskräfte seiner Theilchen zu verändern, wie z. B. durch die Wirkung der Wärme, ausgedehnt oder zusammengezogen wäre. In diesem Falle würden sich in dem neuen Stabe keine Spannungen erzeugen und derselbe würde wie ein in seinem natürlichen Zustande befindlicher Stab anzusehen sein. Auch hätte man auf den so erhaltenen neuen Stab denselben Werth für den Elastizitätsmodel E in Anwendung zu bringen, welcher für den früheren Stab durch Versuche ermittelt war. Denn denkt man sich, irgend eine innere Ursache vermehrte z. B. die Abstoßungskräfte der einzelnen Massentheilchen in dem Maaße, daß daraus für alle in Einem Querschnitte des Stabes liegenden Theilchen eine Vermehrung hervorginge, welche durch die Kraft p_1 gemessen würde; so leuchtet ein, daß wenn man gleichzeitig an beiden Enden des Stabes einen Druck gleich p_1 anbrächte, der Stab unverändert seine frühere Länge L beibehalten würde, wobei sich nur in seinem Inneren eine Spannung gleich p_1 erzeugte. Brächte man aber einen solchen Druck von außen nicht an; so würde sich der Stab ausdehnen und offenbar eine Länge L_1 gleich der annehmen, bis zu welcher eine äußere Zugkraft gleich p_1 ihn auszudehnen fähig wäre. Für diese Länge L_1 hätte man daher den Werth (Gleichung 490) $L_1 = \frac{p_1 + E}{E} L$, oder, wenn die neue Länge L_1 beobachtet würde, für die Stärke der inneren ausdehnenden Kraft $p_1 = E \frac{L_1 - L}{L}$. Sollte jetzt der neue Stab, welcher sich wiederum in einem natürlichen Zustande von der Länge L_1 befindet, auf die erste Länge L durch eine äußere Kraft p' zusammengedrückt werden; so würde man für den Werth der hierzu erforderlichen Kraft (Gleichung 490^a) den Ausdruck $p' = E' \frac{L_1 - L}{L}$ haben, worin E' den Elastizitätsmodel für den neuen Stab bezeichnet. Nun leuchtet ein, daß ein Druck gleich p_1, welcher vorhin die Ausdehnung des Stabes verhindert haben würde, auch jetzt hinreichend sein wird, um den Stab auf die anfängliche Länge L zurückzuführen und dabei dieselbe Spannung p_1 im Innern desselben zu erzeugen. Da man hiernach $p' = p_1$ hat; so folgt $E' \frac{L_1 - L}{L} = E \frac{L_1 - L}{L}$ und hieraus $E' = E$ d. h. der Elastizitätsmodel für irgend eine Substanz bleibt derselbe, wenn auch durch die Wirkung innerer Ursachen auf die Molekularkräfte der einzelnen Theilchen die Dichtigkeit derselben geändert wird, ohne daß dadurch zwischen den Theilchen Spannungen erzeugt werden, welche durch äußere Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden müßten. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß solche innere Ursachen, wie namentlich die Wärme, keine andere Wirkung äußern, als eine einfache Vermehrung oder Verminderung der Intensität der Anziehungs- und Abstoßungskräfte der Massentheilchen, ohne dabei fremdartige Kräfte ins Leben zu rufen, welche ihrerseits ebenfalls jene Molekularkräfte zu modifiziren oder den Aggregatzustand der Masse zu ändern streben; auch dürfte durch die Wärme keine chemische Wirkung erzeugt werden. In allen derartigen Fällen würde auch der Elastizitätsmodel einen anderen Werth annehmen; namentlich würden sich aber alsdann die Gränzen der Elastizität mehr oder weniger ändern, und man muß sogar annehmen, daß die Letzteren selbst unter der früheren Voraussetzung, wo der Model E konstant bleibt, jedesmal mit der Dichtigkeit der Masse eine Änderung erleiden.

Nach den Formeln (490^a) ist der Betrag der Kraft, welche fähig ist, einen Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt von der ursprünglichen Länge L bis auf die Länge L_1 zusammenzudrücken oder um die Länge l zu verkürzen,

$$p = E\frac{L - L_1}{L_1} = E\,\frac{l}{L - l}.$$

Setzt man nun voraus, das Material des Stabes erleide unter der Wirkung der Kraft p im Verhältniß zu seiner ursprünglichen Länge L nur eine äußert geringe Verkürzung l; so wird das Verhältniß $\frac{l}{L - l}$ sehr nahe gleich dem Verhältnisse $\frac{l}{L}$ und der Werth der zusammendrückenden Kraft sehr nahe gleich

$$p = E\,\frac{l}{L}$$

sein. Unter der gemachten Voraussetzung, welche fast für alle in Konstruktionen vorkommenden starren Körper, und auch für die tropfbaren Flüssigkeiten gilt, ergibt sich daher der Werth der zusammendrückenden Kraft aus dem Werthe der Längenverkürzung, und umgekehrt der Werth der Längenverkürzung aus dem der Kraft sehr nahe aus denselben Beziehungen (490), welche zwischen dem Werthe der ausdehnenden Kraft und dem der entsprechenden Längenzunahme aufgestellt sind. Bei vollkommen tropfbaren Flüssigkeiten hat man jedoch zu bemerken, daß für dieselben die obere Elastizitätsgränze für die Ausdehnung durch äußere Kräfte null ist, sodaß sie eine mechanische Ausdehnung auch nicht im geringsten Grade ertragen können, ohne jene Gränze zu überschreiten.

Für andere Körper, welche durch geringe Druckkräfte bis auf sehr kleine Theile ihrer ursprünglichen Volumen zusammengedrückt werden, für welche also L im Vergleich zu L_1 immer sehr groß ist, nähert sich die Beziehung, welche zwischen dem äußeren Drucke und dem entsprechenden Volum besteht, umso mehr dem oben entwickelten Mariotteschen Gesetze

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{L_2}{L_1},$$

jemehr ihr Elastizitätsgrad dem der vollkommenen elastischen Flüssigkeiten nahe kommt.

§. 349. Bestimmung der Arbeitseinheiten, welche entwickelt werden müssen, um einen Stab von K Quadratzoll Querschnitt und L Fuß Länge um eine gegebene Länge von l Fuß auszudehnen.

Wenn x irgend eine Zunahme der Länge des Stabes, also einen Theil von l bezeichnet; so ist die dieser Verlängerung entsprechende Zugkraft nach Gleichung (490) gleich $\frac{EK}{L}x$; demnach die Arbeit, welche bei der weiteren Verlängerung des Stabes um die sehr kleine Größe $\triangle x$ entwickelt wird, gleich $\frac{KE}{L}x\triangle x$ (wobei man sich denkt, daß die Zugkraft während dieser ungemein kleinen Längenzunahme konstant bleibe). Die Gesammtarbeit U, welche unter dieser Voraussetzung auf den Stab entwickelt wird, während sich seine Länge um l vermehrt, ist mithin $= \frac{KE}{L}\Sigma x\triangle x$, oder wenn man $\triangle x$ als unendlich klein annimmt, für welche Annahme die gemachte Voraussetzung offenbar der Wirklichkeit entspricht $= \frac{KE}{L}\int_0^l x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{KE}{L}\,l^2$, und man hat

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{KEl^2}{L} \;\ldots\; (491).$$

§. 350. Da nach Gleichung (490) $P = \frac{KE}{L}l$ ist; so hat man auch $U = \frac{1}{2}Pl$, und hieraus folgt, daß die zur Ausdehnung des Stabes erforderliche Arbeit die Hälfte von der beträgt, welche erforderlich sein würde, den Stab um dieselbe Länge auszudehnen, wofern der Widerstand, welcher sich der Ausdehnung entgegensetzt, überall dem bei der größten Ausdehnung l stattfindenden Widerstande gleich wäre. Hätte man daher die ganze Kraft **P**, welche der größten Ausdehnung l entspricht, auf Ein Mal an dem Stabe in seiner ursprünglichen Form angebracht; so würde in dem Augenblicke, wo die Ausdehnung l erreicht wird, zweimal so viel Arbeit auf den Stab entwickelt sein, als zur Überwindung seiner Elastizität verbraucht wäre. Die überflüssige Hälfte der entwickelten Arbeit würde demnach in dem Stabe und in dem Körper, welcher die Zugkraft hervorbringt, angehäuft sein, und wenn es Beiden verstattet ist, sich weiter zu bewegen (wie z. B., wenn die Zugkraft durch ein an dem Stabe frei aufgehängtes Gewicht erzeugt würde) so würde diese angehäufte Arbeit gerade im Stande sein, den Stab noch ferner um dieselbe Länge l auszudehnen. Die gesammte Verlängerung um $2l$ könnte jedoch nicht von Bestand sein, da die auf den Stab angebrachte Zugkraft nur gleich der ist, welche ihn in der Verlängerung l erhalten kann. Demnach würde der Endpunkt des Stabes mit einer gewissen Geschwindigkeit zurückkehren und um denjenigen Punkt oszilliren, welcher der Verlängerung l entspricht (s. weiter unten §. 354).

§. 351. Eliminirt man zwischen den Gleichungen (490) und (491) die Größe l; so kommt

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{P^2 L}{KE}, \ldots . \quad (492)$$

woraus folgt, daß die Arbeit, welche unter der Wirkung irgend einer Zugkraft auf einen Stab entwickelt wird, bis derselbe die entsprechende Längenzunahme erlitten hat, im geraden Verhältnisse mit dem Quadrate der Zugkraft und mit der Länge des Stabes und im umgekehrten Verhältnisse mit der Fläche des Querschnittes variirt.

§. 351[a]. Bestimmung der Arbeitseinheiten, welche entwickelt werden müssen, um einen Stab von

K Quadratzoll Querschnitt und L Fuß Länge auf eine absolute Länge von L_1 Fuß zusammenzudrücken.

Wenn in irgend einem Augenblicke der Zusammendrückung x_1 die Länge des verkürzten Stabes bezeichnet; so hat man nach Gleichung (490^a) für die Kraft, welche in diesem Augenblicke auf den Stab wirken muß, den Werth

$$KE\frac{L-x_1}{x_1}=KE\left(\frac{L}{x_1}-1\right),$$

und demnach für die Arbeit, welche entwickelt werden muß, um den Stab ferner um eine sehr geringe Größe $\triangle x_1$ zu verkürzen, wenn man annimmt, daß bei dieser ungemein kleinen Längenabnahme die drückende Kraft unveränderlich bleibt, $KE\left(\frac{L}{x_1}-1\right)\triangle x$. Hieraus folgt für die Gesammtarbeit, welche aufgewendet werden muß, um den Stab von der ursprünglichen Länge L auf die verkürzte Länge L_1 zu bringen,

$$U=\int_{L_1}^{L} KE\left(\frac{L}{x_1}-1\right)dx_1=KE\left[L\log\frac{L}{L_1}-\left(L-L_1\right)\right]$$

oder

$$U=KEL_1\left[\frac{L}{L_1}\log\frac{L}{L_1}-\left(\frac{L}{L_1}-1\right)\right]\ldots\ldots(492^a).$$

Setzt man $L_1=\frac{1}{n}L$, also $\frac{L}{L_1}=n$; so kann man die vorstehende Formel auch schreiben

$$U=\frac{1}{n}KEL\left[n\log n-(n-1)\right].$$

Wenn man auf den Stab in dem natürlichen Zustande sogleich eine Kraft $P=KE\frac{L-L_1}{L_1}=KE\,(n-1)$ angebracht hätte, welche fähig wäre, denselben in der verkürzten Länge $L_1=\frac{1}{n}L$ zu erhalten; so würde diese Kraft in dem Augenblicke, wo der Stab die Länge L_1 erreichte, eine Arbeit $=P(L-L_1)$

$= KE\frac{L-L_1}{L}(L-L_1) = \frac{1}{n} KEL(n-1)^2$ auf denselben entwickelt haben. Da man nun findet, daß wenn $n > 1$, was hier immer der Fall ist, $(n-1)^2 > n \log n - (n-1)$ ist; so folgt, daß die Kraft P mehr Arbeit verrichtet haben wird, als zur Zusammendrückung des Stabes bis auf die Länge L_1 erforderlich ist, daß mithin die Zusammendrückung weiter fortschreiten, alsdann aber ein Zurückkehren stattfinden wird, weil die Kraft P nicht im Stande ist, den Stab in einer größeren Verkürzung, als L_1, zu erhalten. Das äußerste Ende des Stabes würde demnach in ähnlicher Weise, wie bei einem ausgedehnten Stabe (s. §. 350), um den Punkt oszilliren, welcher der Länge L_1 entspricht.

Wenn ein Stab durch die Kraft P bereits auf die Länge L_1 zusammengedrückt ist, und derselbe soll durch eine entgegengesetzt wirkende Kraft wiederum in seine frühere Länge L zurückgebracht werden; so leuchtet ein, daß diese letztere Kraft in einem jeden Zustande des Stabes bei der rückgängigen Bewegung derjenigen Kraft gleich und entgegengesetzt sein muß, welche bei der früheren Zusammendrückung denselben Zustand herbeiführte, und daß dieselbe mithin eine Quantität der Arbeit entwickeln muß, welche der durch Gleichung (492^a) dargestellten vollkommen gleich ist.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (492^a) und (490^a) die Größe L_1; so erhält man man für die Arbeit U, als Funktion des Druckes P, welcher den Stab in der verkürzten Länge L_1 zu erhalten im Stande ist, den Ausdruck

$$U = \left[\log\left(\frac{P+KE}{KE}\right) - \frac{P}{P+KE}\right] KEL \;\ldots\; (492^b).$$

Die Model für das Zurückspringen und das Zerbrechen.

§. 352. Da nach Gleichung (491) $U = \frac{1}{2}E\left(\frac{l}{L}\right)^2 KL$ ist; so leuchtet ein, daß die verschiedenen Beträge an Arbeit, welche auf verschiedene Stäbe von Ein und demselben Materiale entwickelt werden müssen, um dieselben um gleiche Bruchtheile $\frac{l}{L}$ zu verlängern, sich zueinander verhalten, wie das Produkt KL.

Nun nehme man an, zwei solcher Stäbe seien gerade um denjenigen Bruchtheil ausgedehnt, welcher ihrer Elastizitätsgränze entspricht, U_e sei die Arbeit, welche auf den Einen verrichtet werden muß, um denselben zu dieser Ausdehnung zu bringen und M_e die Arbeit, welche auf den anderen zur Hervorbringung eines gleichen Effektes entwickelt werden muß, ferner betrage der Querschnitt des letzteren Einen Quadratfuß, und seine Länge Einen laufenden Fuß. Alsdann hat man offenbar

$$U_e = M_e KL \ldots. (493).$$

M_e ist in diesem Falle die Größe, welche man den Model für das Zurückspringen nennt. Dieselbe ist offenbar ein Maaß für den Widerstand, welchen das Material des Stabes einer Kraft entgegensetzt, welche in der Art eines Stoßes wirkt, um den Stab über seine Elastizitätsgränzen hinaus zu verlängern.

Wenn M_b die Arbeit darstellt, welche in ähnlicher Weise auf einen Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt und Einem Fuß Länge entwickelt werden muß, um denselben bis zum erfolgenden Bruche auszudehnen; so wird diese Größe ein Maaß sein für den Widerstand, welchen der Stab unter gleichen Umständen dem Zerbrechen entgegensetzt; dieselbe kann demnach von der vorhergehenden Größe M_e durch den Namen des Models für das Zerbrechen unterschieden werden. Stellt nun U_b die Arbeit dar, welche auf einen Stab von K Quadratzoll Querschnitt und L Fuß Länge verrichtet werden muß, um denselben bis zum erfolgenden Bruche auszudehnen; so hat man, wie vorhin,

$$U_b = MK_b L \ldots. (494).$$

Dieser Model M_b, welcher den Betrag an Arbeit darstellt, der auf einen Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt und Einem Fuß Länge entwickelt werden muß, um denselben bis zum Zerreißen auszudehnen, darf nicht mit dem Maaße der absoluten Festigkeit verwechselt werden. Durch dieses Maaß wird nämlich die einfache Kraft bezeichnet, welche auf den Stab angebracht werden muß, um denselben bis zum Momente des Zerreißens zu bringen. Diese Kraft, welche nach Gleichung (490) durch die Formel $P = E\left(\frac{l}{L}\right)K$ dargestellt wird, worin l die

Längenzunahme des Stabes im Augenblicke des Bruches bezeichnet, ist nämlich für alle Stäbe von demselben Materiate und demselben Querschnitte, welche um einen gleichen Bruchtheil ihrer Länge ausgedehnt sind, ganz dieselbe und von der absoluten Länge L der Stäbe unabhängig, sodaß alle diese Stäbe durch Ein und dieselbe Kraft zerrissen werden, während diese Kraft bei den verschiedenen Stäben verschiedene Quantitäten von Arbeit entwickelt.

Wenn P_e und P_b die Zugkräfte darstellen, welche einen Stab von K Quadratzoll Querschnitt und jeder beliebigen Länge resp. bis zu seiner Elastizitätsgränze und bis zum Momente des Bruches ausdehnen würden; so hat man für die Arbeit, welche diese Kräfte auf einen solchen Stab von L Fuß Länge entwickeln würden, wegen Gleichung (493) und (492) und wegen Gleichung (494) und (492) resp.

$$U_e = M_e \, . \, KL = \tfrac{1}{2} \frac{P_e^2 L}{KE}$$

und

$$U_b = M_b \, . \, KL = \tfrac{1}{2} \frac{P_b^2 L}{KE} \, .$$

Hieraus folgt

$$M_b = \tfrac{1}{2} \frac{P_e^2}{K^2 E} \text{ und } M_b = \tfrac{1}{2} \frac{P_b^2}{K^2 E} \cdots \text{(495)}.$$

Wenn man nun durch Versuche die Werthe der Kräfte P_e und P_b ermittelt hat; so können diese Formeln dazu dienen, die Werthe der Model M_e und M_b zu bestimmen.

Wenn der Stab durch Zusammendrückung bis an seine untere Elastizitätsgränze und bis zu dem Momente des Bruches durch Kompression gebracht werden sollte; so ergeben sich für die Formeln (493) und (494) ganz ähnliche Ausdrücke, worin nur die Model M'_e und M'_b resp. für das Zurückspringen und für das Zerbrechen andere Werthe annehmen werden, (wenn man die Zusammendrückung nicht etwa als sehr unbedeutend voraussetzen wollte, in welchem Falle man nach der Schlußbemerkung zu §. 349 für die Model M ganz dieselben Ausdrücke, wie in Gleichung (495), erhalten würde). Denn nach Gleichung (492^a) hat man für die Arbeit, welche auf einen Stab von K Quadratzoll und L Fuß Länge entwickelt werden muß, um denselben bis auf die Länge L_1 zusammenzudrücken, $U = E\left[\log\frac{L}{L_1} - \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)\right] KL$. Für alle Stäbe desselben Materiales, deren ursprüngliche Länge L durch Zusammendrückung in demselben Verhältnisse $\frac{L}{L_1}$ reduzirt ist, ist dieser Ausdruck, wie vorhin, nur dem Produkte KL proportional. Man hat demnach auch hier

$$U'_e = M'_e\, KL \;\ldots\; (495^a).$$

und

$$U'_b = M'_b\, KL, \;\ldots\; (495^b).$$

worin M'_e und M'_b resp. die Quantitäten der Arbeit bezeichnen, welche auf einen Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt und Einem Fuß Länge, etwa durch eine Stoßkraft, entwickelt werden müssen, um denselben durch Zusammendrückung bis an seine Elastizitätsgränze und bis zum Zerbrechen zu bringen. U'_e und U'_b haben eine ähnliche Bedeutung für einen Stab desselben Materiales von K Quadratzoll Querschnitt und L Fuß Länge.

Wenn P'_e und P'_b die Druckkräfte darstellen, welche fähig sind, einen Stab von K Quadratzoll Querschnitt und willkürlicher Länge resp. bis zu seiner Elastizitätsgränze und bis zum Momente des Bruches zusammenzudrücken; so hat man für die Arbeit, welche diese Kräfte auf einen solchen Stab von L Fuß Länge entwickeln würden nach den Gleichungen (495^a) und (492^b) und nach den Gleichungen (495^b) und (492^b) resp.

$$U'_e = M'_e\, KL = \left[\log\left(\frac{P'_e + KE}{KE}\right) - \frac{P'_e}{P'_e + KE}\right] KEL$$

und

$$U'_b = M'_b\, KL = \left[\log\left(\frac{P'_b + KE}{KE}\right) - \frac{P'_b}{P'_b + KE}\right] KEL.$$

Hieraus folgt

$$M'_e = E\left[\log\left(\frac{P'_e + KE}{KE}\right) - \frac{P'_e}{P'_e + KE}\right]$$

und

$$M'_b = E\left[\log\left(\frac{P'_b + KE}{KE}\right) - \frac{P'_b}{P'_b + KE}\right].$$

Hat man also durch Versuche die Werthe der Kräfte P'_e und P'_b ermittelt; so ergeben die letzteren beiden Formeln die Werthe der Model M'_e und M'_b.

§. 353. **Die Ausdehnung eines Stabes, welcher vertikal aufgehängt ist und in der Richtung seiner Länge einen bestimmten Zug auszuhalten hat, unter Berücksichtigung des Einflusses seines eigenen Gewichtes.**

x sei die Länge irgend eines Theiles des Stabes vor seiner Ausdehnung, $\triangle x$ ein Element dieser Länge, L die ganze Länge des Stabes vor der Ausdehnung, w das Gewicht eines jeden laufenden Fußes seiner Länge, K sein Querschnitt und P die darauf angebrachte Zugkraft. Ferner gehe die Länge x bei der Ausdehnung des Stabes unter der Wirkung der Kraft P und der ihres eigenen Gewichtes in die Länge x_1 über, während die ganze Länge L des Stabes in L_1 übergehe. Da die Länge des Stabtheiles, welcher sich unterhalb des Punktes befand, dessen Abstand von dem Aufhängepunkte vor der Ausdehnung x war, gleich $L-x$ gewesen ist, und das Gewicht dieses Theiles sich bei der Ausdehnung nicht geändert hat; so wird dasselbe auch ferner durch $(L-x)w$ dargestellt werden. Dieses Gewicht, sammt der Kraft P, bildet den auf das Element $\triangle x$ sich äußernden Zug. Die Verlängerung dieses Elementes unter der bezeichneten Zugkraft wird demnach (Gleichung 490) durch $\frac{P+(L-x)w}{KE}\triangle x$ dargestellt sein, sodaß die Länge $\triangle x_1$ dieses Elementes nach der Verlängerung $\triangle x_1 = \triangle x + \frac{P+(L-x)w}{KE}\triangle x$ ist. Dividirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $\triangle x$, und läßt die Elemente unendlich klein werden; so erhält man

$$\frac{dx_1}{dx} = 1 + \frac{P+(L-x)w}{KE},$$

und daraus

$$L_1 = \int_0^L \left(1 + \frac{P + (L - x)\,w}{KE}\right) dx$$

d. i.

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \left(1 + \frac{P}{KE}\right) L + \frac{w}{2KE}\,L^2 \\ \text{oder auch}\quad &= L + \left(P + \tfrac{1}{2} w L\right) \frac{L}{KE} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (497.$$

Wenn der Stab vertikal aufgerichtet und auf eine feste Ebene gestellt wäre und den Druck einer komprimirenden Kraft P auszuhalten hätte; so würde der untere Theil des Stabes von der Länge x durch die Kraft $P + (L - x)\,w$ zusammengedrückt werden. Nach Gleichung (490^a) würde sich daher das Längenelement, welches vor der Zusammendrückung gleich $\triangle x$ war, auf die Länge

$$\triangle x_1 = \triangle x - \frac{P + (L - x)\,w}{P + (L - x)\,w + KE}\,\triangle x = \frac{KE}{P + KE + (L - x)\,w}\,\triangle x$$

reduziren. Hieraus folgt, wie vorhin, für die ganze Länge des Stabes nach der Zusammendrückung

$$L_1 = \int_0^L \frac{KE\;dx}{P + KE + (L - x)\,w} = \frac{KE}{w} \log\left(\frac{P + KE + Lw}{P + KE}\right) \ldots\ldots (497^a).$$

Das vorstehende ist der strenge Ausdruck für die Länge des zusammengedrückten Stabes nach den Gesetzen der Elastizität. Wenn jedoch die Kompression im Verhältniß zu der absoluten Länge des Stabes sehr gering ist, was fast bei allen praktischen Anwendungen der vorstehenden Sätze der Fall ist, (s. die Schlußbemerkung zu §. 348) sodaß man das Verhältniß $\frac{L - L_1}{L_1}$ oder $\frac{l}{L_1}$ der Verkürzung l zu der reduzirten Länge L_1 sehr nahe gleich dem Verhältnisse $\frac{l}{L}$ der Verkürzung l zu der ursprünglichen Länge L des Stabes setzen kann; so wird die Formel

(490^a) $P = KF \frac{l}{L-l}$, welche sich auf den Fall der Zusammendrückung bezieht, mit der anderen Formel (490) $P = KE \frac{l}{L}$, welche sich auf den Fall der Ausdehnung bezieht, identisch, und aus beiden folgt alsdann

$$l = \frac{PL}{KE}.$$

Unter der Voraussetzung also, daß die Zusammendrückung im Vergleich zu der ganzen Länge des Stabes nur sehr unbedeutend sei, würde man denn auch statt der Gleichung (497^a) die Formel

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \left(1 - \frac{P}{KE}\right) L - \frac{w}{2KE} L^2 \\ \text{oder auch} \\ \quad = L - \left(P + \frac{1}{2} w L\right) \frac{L}{KE} \end{array}\right\} \dots (497^b).$$

erhalten, welche sich auf die Differenzialgleichung

$$\triangle x_1 = \triangle x - \frac{P + (L-x)w}{KE} \triangle x$$

gründet. Man sieht, daß sich diese Formel von der Gleichung (497) nur durch das entgegengesetzte Zeichen der Kraft P und des Gewichtes wL unterscheidet, sodaß man dieselbe aus jener Gleichung unter der hier gemachten Voraussetzung unmittelbar hätte ableiten können, wenn man die Kräfte P und wL negativ genommen hätte. Eine solche Änderung des Zeichens von P und wL entspricht hier in der That einer Umkehrung der Richtungen dieser Kräfte in Beziehung zu dem befestigten Endpunkte des Stabes, indem dieselben hier die Länge L zu vermindern streben, während sie vorhin diese Länge zu vergrößern strebten.

Wenn der Stab frei herabhängt, sodaß die Gewichte seiner Theile ihn auszudehnen streben, und es ist gleichzeitig eine Kraft P vertikal von unten nach oben auf denselben angebracht, welche ihn zusammenzudrücken strebt; so findet man offenbar die Länge L_1, welche der Stab unter diesen Umständen, und unter der Voraussetzung annehmen wird, daß alle Kompression in irgend einem Theile des Stabes nur sehr unbedeutend sei, wenn man in Gleichung (497) P mit negativem Zeichen nimmt. Man erkennt, daß wenn eine solche Kraft P gleich dem halben Gewichte wL des Stabes wäre, die ursprüngliche Länge L des Stabes keine Änderung erleiden würde, indem alsdann die unteren Theile des Stabes durch die überwiegende Wirkung der Kraft P um ebensoviel zusammengedrückt würden, wie die oberen Theile durch die überwiegende Wirkung der Gewichte ausgedehnt würden.

Wäre der Stab vertikal auf eine feste Ebene gestellt und durch eine nach oben gerichtete Kraft P affizirt; so würde man den Werth von L_1 aus Gleichung (497^b) finden, wenn man darin das Zeichen von P umkehrte. Auch hier würde alsdann eine Kraft $P = \frac{1}{2} wL$ bewirken, daß die ursprüngliche Länge L des Stabes ungeändert bliebe.

Die Annahme, daß die Elastizitätskraft eines Stabes bei der Zusammendrückung dem Verhältnisse $\frac{l}{L}$ oder einfach der Längenabnahme l, da L eine constante Größe ist, proportional sei, solange die Zusammendrückung im Vergleich zu der ganzen Länge nur sehr gering ist, führt offenbar zu viel einfacheren Formeln, als die strenge Anwendung der Gesetze nach §. 348. Außerdem kann man diese Formeln durch bloße Zeichenveränderungen aus denen erhalten, welche sich für den analogen Fall der Ausdehnung ergeben. Da nun in der Wirklichkeit die Zusammendrückung der in Konstruktionen vorkommenden starren Körper stets sehr gering ist, sodaß sich auf die Bedingungen ihrer Elastizität recht wol die vorstehende Annahme anwenden läßt; so wird man bei allen nachfolgenden Untersuchungen davon ausgehen, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die Kompression immer so gering sei, daß man $\frac{l}{L}$ für $\frac{l}{L_1}$ substituiren könne.

§. 354. Die vertikalen Oszillationen eines elastischen Stabes oder Seiles, an dessen unterem Ende ein gegebenes Gewicht aufgehängt ist.

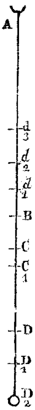
A sei der Aufhängepunkt des Stabes (Fig. 1), L seine Länge

AB vor der Ausdehnung, l die Verlängerung, welche derselbe durch ein an seinem Ende aufgehängtes Gewicht W erleidet und C die dem Gewichte W entsprechende Ruhelage des Endpunktes des Stabes.

Man nehme an, der bis C ausgedehnte Stab werde durch die Anbringung irgend einer andern gegebenen Zugkraft noch um

Fig. 1.

Fig. 2.



die Länge $CD = c$ ausgedehnt und dann sich selbst und der Wirkung des Gewichts W überlassen. Der Endpunkt des Stabes wird sich alsdann in Oszillationen versetzen, und P sei irgend eine Lage desselben zu irgend einer Zeit dieser oszillirenden Bewegung. Bezeichnet man nun CP mit x, sodaß x negativ wird, falls der Punkt P oberhalb C läge; so wird die entsprechende Verlängerung BP des Stabes durch $l+x$ und die Kraft, welche im Stande ist, den Stab in dieser Verlängerung zu erhalten, nach Gleichung (490), durch $\frac{KE}{L}(l+x)$ dargestellt (hierbei ist die Wirkung des eigenen Gewichtes des Stabes ganz vernachlässigt). Dieser Ausdruck ist offenbar der Werth des Widerstandes, welchen die Elastizität des Stabes der Bewegung des Endpunktes P entgegensetzt, wenn sich derselbe von oben nach unten, also in der Richtung des Gewichtes W, bewegt, oder der Werth der elastischen Kraft des Stabes selbst, mit welcher derselbe zurückzuspringen und die Bewegung zu beschleunigen strebt, wenn sich der Punkt P von unten nach oben, also in entgegengesetzter Richtung des Gewichtes W, bewegt. In beiden Fällen wirken auf den an dem Endpunkte des Stabes aufgehängten schweren Körper die Kräfte $\frac{KE}{L}(l+x)$ und W, welche einander direkt entgegengesetzt sind, sodaß die bewegende oder wirksame, nicht im Gleichgewichte gehaltene Kraft dieses Körpers (§. 92), welche denselben in jenem Augenblicke der Verlängerung nach dem Punkte C zu treiben strebt, durch $\frac{KE}{L}(l+x) - W$ ausgedrückt ist. Da W gleich der Zugkraft ist, welche im Stande ist, den Stab in der Verlängerung um l zu erhalten; so hat man nach Gleichung (490) $W = \frac{KE}{L} l$, und demnach für den Werth der wirksamen Kraft des schweren Körpers W in dem Augenblicke der Verlängerung um x und in der Richtung von P gegen C den Ausdruck $\frac{KE}{L} x$.

Die vorstehende Formel ist offenbar auch der Ausdruck für die Größe der wirksamen Kraft des Körpers W, wenn sich der Endpunkt P des Stabes in irgend einem zwischen C und B liegenden Punkte befindet. Überschritte jedoch der Endpunkt P bei den rückgängigen Oszillationen die Lage B, sodaß alsdann der Stab komprimirt würde; so wäre jene Formel nur dann noch der wahre Ausdruck für die wirksame Kraft, wenn man voraussetzte, daß die Zusammendrückung im Vergleich zu der Länge des Stabes äußerst gering ausfiele (s. die Schlußbemerkung zu §. 353). Übrigens geht aus dem Nachfolgenden hervor, daß es unmöglich ist, daß die Oszillationen von C gegen B den Punkt B überschreiten, wenn CD nicht größer, als CB, angenommen ist.

Da nun die wirksame Kraft des schweren Körpers W, dessen Masse $= \frac{W}{g}$ ist, im geraden Verhältnisse mit dem Abstande x des Punktes P von dem gegebenen Punkte C variirt; so folgt aus dem in §. 97 aufgestellten allgemeinen Prinzipe, daß sich die Oszillationen des Punktes P auf gleiche Abstände c zu beiden Seiten des Mittelpunktes C erstrecken und isochron sein werden, indem die Zeit T einer jeden Oszillation durch die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{WL}{gKE}} \dots \quad (498).$$

dargestellt ist (hierbei sind natürlich alle fremdartigen Widerstände, wie die der Luft u. s. w., ausgeschlossen).

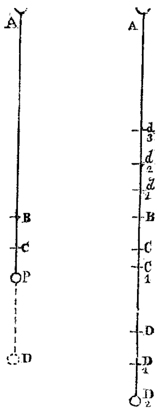
Der Abstand des Mittelpunktes C, um welchen die Oszillationen des Punktes P vor sich gehen, von A ist gleich $L + l$, sodaß man, wenn dieser Abstand mit L_1 bezeichnet und für l sein Werth $\frac{WL}{KE}$ substituirt wird,

$$L_1 = L + \frac{WL}{KE} \dots \quad (499).$$

hat.

Man bemerkt, daß die Dauer **T** der Oszillationen, wie bei einem Pendel, von der Amplitude $2.\overline{CD}=2c$ unabhängig ist. Hierbei wird jedoch ebenso, wie bei den isochronen Pendelschwingungen, vorausgesetzt, daß die Amplitude im Vergleich zu der Länge **AC** des Stabes nur sehr gering sei.

Fig. 1. Fig. 2.



§. 355. Nehmen wir jetzt an, das Gewicht **W** werde in dem Augenblicke, wo dasselbe bei seiner ersten Oszillation den höchsten Punkt d_1 (Fig. 2) erreicht, und demnach für einen Augenblick in Ruhe ist, um ein zweites Gewicht w vermehrt. Alsdann wird eine zweite Reihe von Oszillationen um einen neuen Mittelpunkt C_1 beginnen, dessen Abstand L_2 von **A** offenbar durch die Formel

$$L_2 = L + \frac{(W+w)L}{KE} \; \ldots\ldots \; (500).$$

dargestellt ist, sodaß der Abstand CC_1 der beiden Mittelpunkte gleich $\frac{wL}{KE}$ und der größte Abstand C_1D_1 unterhalb des Punktes C_1, welcher bei der zweiten Oszillation erreicht wird, gleich dem Abstande C_1d_1 ist, bei welchem die Oszillation oberhalb jenes Punktes anhob. Nun ist aber

$$C_1D_1 = C_1d_1 = Cd_1 + CC_1 = CD + CC_1 = c + \frac{wL}{KE};$$

mithin die Amplitude d_1D_1 der zweiten Oszillation $= 2\left(c + \frac{wL}{KE}\right)$.

In dem Augenblicke, wo der tiefste Punkt D_1 der zweiten Oszillation erreicht wird, werde das Gewicht w weiter hinweggenommen. Alsdann wird eine dritte Reihe von Oszillationen beginnen, deren Mittelpunkt durch die Gleichung (499) bestimmt und demnach mit dem Mittelpunkte **C** identisch ist, um welchen die erste Oscillation stattfand. Bei der dritten Oszillation wird daher der Endpunkt des Stabes bis zu einem Punkte d_2 ansteigen, welcher ebenso weit über **C** liegt, wie D_1 unter **C** liegt, sodaß die Amplitude dieser dritten Oszillation durch $2\,\overline{CD_1} = 2(\overline{C_1\,D_1} + \overline{C\,C_1}) = 2\left(c + \frac{2wL}{KE}\right)$ dargestellt ist.

Wird nun in dem Augenblicke, wo der höchste Punkt d_2 dieser dritten Oszillation erreicht wird, das Gewicht w wieder hinzugefügt; so beginnt eine vierte Oszillation, deren Mittelpunkt durch Gleichung (500) bestimmt und demnach mit dem Mittelpunkte C_1 identisch ist, um welchen die zweite Oszillation erfolgte. Der Endpunkt des Stabes wird daher bei dieser vierten Oszillation unterhalb des Punktes C_1 den größten Abstand $C_1\,D_2$ gleich $C_1\,d_2$ erreichen, und die Amplitude dieser Oszillation wird durch $2\,\overline{C_1\,d_2} = 2(\overline{C_1\,C} + \overline{C d_2}) = 2\,(\overline{CC_1} + \overline{CD_1}) = 2\left(c + \frac{3wL}{KE}\right)$ dargestellt sein.

Denkt man sich das Gewicht w in der vorstehenden Weise fortwährend dem Gewichte W hinzugefügt, sobald der höchste Punkt einer jeden Oszillation erreicht wird, und wieder hinweggenommen, sobald der tiefste Punkt erreicht wird; so leuchtet ein, daß die Amplitude dieser Oszillationen fortwährend in einer arithmetischen Progression wachsen wird, sodaß die Amplitude A_n der $n$ten Oszillation durch die Formel

$$A_n = 2\left[c + (n-1)\frac{wL}{KE}\right] \ldots\ldots (501)$$

dargestellt ist.

Die aufsteigenden Oszillationen dieser Reihe werden immer um den Mittelpunkt C und die niedersteigenden um den Mittelpunkt C_1 erfolgen. Wenn n eine paare Zahl ist, so wird der Mittelpunkt der $n$ten Oszillation C_1 sein; die Ausdehnung c_n des Stabes, welche dem tiefsten Punkte dieser Oszillation entspricht, wird demnach gleich $\overline{BC_1} + \frac{1}{2}A_n$, oder wenn man für $\overline{BC_1}$ seinen durch Gleichung (500) bestimmten Werth $\frac{(W+w)L}{KE}$ und für A_n seinen Werth aus Gleichung (501) substituirt,

$$c_n = c + \frac{(W+nw)L}{KL} \ldots\ldots (502).$$

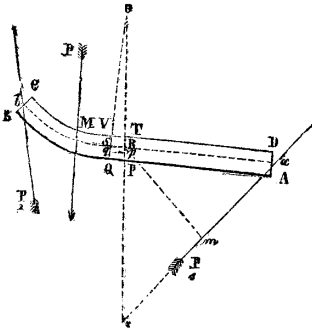
sein.

Hieraus geht hervor, daß durch die lange fortgesetzte periodische Hinzufügung und Hinwegnahme eines Gewichtes w, welches so klein ist, daß dadurch nur eine geringe Verlängerung oder Verkürzung des Stabes hervorgebracht werden kann, wenn es zum ersten Male hinzugefügt oder hinweggenommen wird, zuletzt eine Ausdehnung c_n von dem Betrage erzeugt werden kann, daß in Folge derselben die Elastizitätsgränzen überschritten werden und sogar der Bruch erfolgt. Zahlreiche Beobachtungen haben diese Thatsache bestätigt: die Ketten der Hängebrücken sind durch den regelmäßigen Tritt von Soldaten zerrissen, und Savart hat gezeigt, daß wenn man auf einem elastischen Stabe, welcher in seinem Mittelpunkte befestigt ist, den benetzten Finger in regelmäßigen Zwischenräumen hinundher führt, Ersterer durch die geringe Reibung an seiner Oberfläche mit Leichtigkeit in eine oszillirende Bewegung von meßbarer Amplitude versetzt werden kann. Poncelet hat die Messung Savarts mit theoretischen Ableitungen, ähnlich denen des vorstehenden Paragraphes, verglichen und die Übereinstimmung Beider nachgewiesen.

Biegung.

§. 356. Die neutrale Fläche eines gebogenen Stabes.

Wenn ein prismatischer Stab gebogen wird, so nimmt die Eine Seitenfläche desselben eine konvexe und die andere eine konkave Krümmung an, und es leuchtet ein, daß die Fibern desjenigen Theiles des Stabes, welcher im Zustande der Biegung durch die erstere Fläche begränzt ist, **ausgedehnt** werden, während die Fibern in dem anderen Theile des Stabes **zusammengedrückt** werden. Die Fläche, welche diese beiden Theile des Stabes voneinander trennt, in welcher also die Ausdehnung aufhört und die Zusammendrückung beginnt, sodaß die in derselben liegenden Fibern weder ausgedehnt, noch zusammengedrückt werden, heißt die **neutrale Fläche** des Stabes. Wenn sämmtliche die Biegung des Stabes verursachenden Kräfte in Ein und derselben Ebene **AC** liegen, und **PT** und **QV** die Durchschnitte zweier sehr nahe aneinander liegender Querschnitte des Stabes mit der

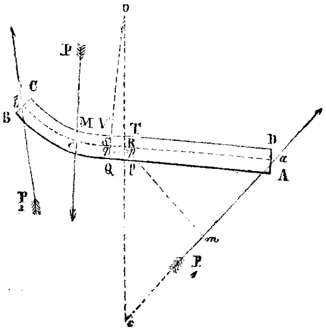


Biegungsebene, ferner **O** den Punkt darstellt, in welchem die gemeinschaftliche, auf der Biegungsebene perpendikular stehende Durchschnittslinie der Ebenen jener beiden Querschnitte die Biegungsebene trifft; so leuchtet ein, daß sich die sehr kurzen Längenelemente aller in dem Volum **PTVQ** des Stabes liegenden Fibern um verschiedene Zylinder mit kreisförmiger Basis gebogen haben werden, deren Axen sämmtlich mit der durch **O** gehenden, auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Durchschnittslinie der beiden Querschnitte **PT** und **QV** zusammenfallen. Hieraus folgt, daß alle Längenfibern, wie pq, welche durch eine in p auf der Biegungsebene perpendikular stehende Linie gehen, nach der Biegung um Ein und denselben Werth entweder ausgedehnt oder zusammengedrückt sein werden. Ist mithin dieser Werth für irgend eine Fiber, wie **RS**, gleich null, d. h. geht die auf der Biegungsebene in **R** perpendikular stehende Linie durch irgend einen Punkt der neutralen Fläche; so werden auch alle übrigen durch diese Linie gehenden Fibern sowenig ausgedehnt, wie zusammengedrückt sein, und demnach sämmtlich in der neutralen Fläche liegen. Da man hiernach in der neutralen Fläche eine unendliche Menge von geraden Linien ziehen kann, welche alle (in a, **R**, **S**, c, b, ꝛc.) auf der Biegungsebene perpendikular stehen; so folgt, daß jene Fläche eine zylindrische sein wird, welche auf der Biegungsebene perpendikular steht, wobei es übrigens nicht erforderlich ist, daß die Basis acb dieser Fläche, oder die neutrale Linie, in ihrer ganzen Ausdehnung eine Kreislinie sei.

§. 357. Lage der neutralen Fläche in einem Stabe.

acb sei der Durchschnitt der Biegungsebene mit der auf derselben perpendikular stehenden zylindrischen neutralen Fläche, **PT** und **QV** seien zwei sehr nahe aneinander liegende Querschnitte des Stabes, welche auf der neutralen Linie acb in R und S normal stehen; ferner seien

P_1, P_2 und P die in der Biegungsebene liegenden Resultanten aller auf den Stab angebrachten Kräfte,



x der Abstand aR, $\triangle x =$ RS,

K die Fläche des Querschnittes PT,

h der Abstand des Schwerpunktes des Querschnittes PT von einer in R auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe, welche also ganz in der neutralen Fläche liegt,

R der Krümmungshalbmesser OR der neutralen Linie im Punkte R,

ϱ der Abstand Rp irgend einer Fiber pq von der durch R gehenden und auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe,

J der Werth des Trägheitsmomentes $\Sigma \varrho^2 \triangle$ K des Querschnittes PT in Beziehung zu der Axe R,

ϑ der Neigungswinkel ReP$_1$ der Richtung der Kraft P_1 gegen die Normale Re auf der neutralen Linie in R,

E der Elastizitätsmodel für die Substanz des Stabes *)

Man bemerkt, daß der Theil APTD des Stabes durch die

---

*) Wenn man sämmtliche in den nachstehenden Formeln vorkommenden Längen nach Zollen mißt; so bezeichnet die Größe E den Werth des Elastizitätsmodels, wie er in der Tabelle am Ende dieses Werkes für die verschiedenen Substanzen angegeben ist. Mißt man jedoch sämmtliche Längen nach Fußen, also auch die Fläche K des Querschnittes nach Quadratfußen; so hat man in alle Formeln 144 E an die Stelle von E zu setzen. Bei dieser Substitution beziehen sich denn auch die Endresultate der Formeln auf räumliche Größen, denen der Fuß als Längeneinheit zu Grunde liegt, ein Umstand, der in manchen Fällen viel Bequemlichkeit darbietet, so z. B. bei der Bestimmung des Betrages von Arbeit, welcher auf die Biegung eines Stabes verwendet werden muß. Wenn jedoch, wie in den früheren Formeln, die beiden Größen E und K immer nur als die gemeinschaftlichen Faktoren Ein und desselben Produktes vorkommen; so kann man K in Quadratzollen bestimmen und für E den Werth aus der Tabelle nehmen, während man für alle übrigen Raumgrößen eine beliebige andere Längeneinheit, als den Zoll, zu Grunde legt. Sollte übrigens in diesem Falle neben dem Flächeninhalte des Querschnittes K noch eine andere Dimension desselben in den Formeln auftreten; so müßte dieselbe mit den übrigen Raumgrößen nach derselben Längeneinheit gemessen werden.

Resultante P_1 und die elastischen Kräfte im Gleichgewichte erhalten wird, welche in dem Querschnitte PT ins Leben gerufen werden. Von diesen elastischen Kräften haben diejenigen, welche in den ausgedehnten Fibern des Theiles RP wirken, ein Bestreben, ihre Angriffspunkte der Ebene SQ näher zu bringen, während diejenigen, welche in den zusammengedrückten Fibern des Theiles RT wirken, ein Bestreben äußern, ihre Angriffspunkte weiter von der Ebene SV zu entfernen.

Denkt man sich nun den Theil PQVT des Stabes aus lauter Fibern von unendlich geringem Querschnitte zusammengesetzt, welche sämmtlich zu RS parallel sind; so wird $\triangle x$ die Länge einer jeden dieser Fibern vor der Biegung des Stabes darstellen, da die Länge der neutralen Fiber RS bei der Biegung ungeändert geblieben ist. Bezeichnet man ferner mit δx die Größe, um welche die Fiber pq bei der Biegung des Stabes ausgedehnt ist; so ist die wirkliche Länge dieser Fiber nach der Biegung durch $\triangle x + \delta x$ dargestellt. Nach Gleichung (490) folgt also, daß die Kraft, welche wirksam gewesen sein muß, um diese Verlängerung hervorzubringen, gleich $\mathrm{E}\,\frac{\delta x}{\triangle x}\triangle \mathrm{K}$ ist, worin $\triangle \mathrm{K}$ den Querschnitt der Fiber oder ein unendlich kleines Element des Querschnittes PT des Stabes bezeichnet. Da nun PT und QV auf RS normal stehen; so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O dieser beiden Linien der Krümmungsmittelpunkt der neutralen Linie für die Krümmung in R und demnach OR die Länge des Krümmungshalbmessers R. Wegen ähnlicher Dreiecke hat man also $\frac{\mathrm{O}p}{\mathrm{OR}} = \frac{p\,q}{\mathrm{RS}}$, d. i. $\frac{\mathrm{R}+\varrho}{\mathrm{R}} = \frac{\triangle x + \delta x}{\triangle x}$ oder $1 + \frac{\varrho}{\mathrm{R}} = 1 + \frac{\delta x}{\triangle x}$; folglich $\frac{\varrho}{\mathrm{R}} = \frac{\delta x}{\triangle x}$. Substituirt man diesen Werth von $\frac{\delta x}{\triangle x}$ in den Ausdruck für die Kraft, welche wirksam gewesen sein muß, um die Ausdehnung der Fiber pq zu erzeugen, und bezeichnet diese Kraft mit P'; so hat man

$$\triangle \mathrm{P}' = \frac{\mathrm{E}\varrho}{\mathrm{R}}\triangle \mathrm{K} \;\ldots\; (503).$$

Stellt man demnach durch K_1 und K_2 resp. die Theile RP und RT des Querschnittes PT des Stabes dar; so ist die Summe der elastischen Kräfte, welche durch die Ausdehnung der in RPQS liegenden Fibern hervorgerufen worden,

$$P' = \sum_0^{K_1} \frac{E\varrho}{R} \triangle K = \frac{E}{R} \sum_0^{K_1} \varrho \triangle K,$$

und ähnlich hat man für die Summe der elastischen Kräfte, welche durch die Zusammendrückung der in RTVS liegenden Fibern wirksam gemacht werden, wenn man voraussetzt, daß die Verkürzung dieser Fibern in Vergleich zu ihrer Länge nur sehr gering sei, sodaß die zu der Zusammendrückung erforderlichen Kräfte dasselbe Gesetz befolgen, wie die zu der Ausdehnung erforderlichen (s. die Schlußbemerkung zu §. 353)

$$P'' = \sum_0^{K_2} \frac{E\varrho}{R} \triangle K = \frac{E}{R} \sum_0^{K_2} \varrho \triangle K.$$

Da nun die auf APTD angebrachten, im Gleichgewichte befindlichen Kräfte die in RP und RT wirkenden Elastizitätskräfte P′ und P″ und die Kraft P_1 sind; so hat man nach §. 16, wenn man die Komponente von P_1 in perpendikularer Richtung zu der Ebene PT oder in paralleler Richtung zu der Tangente der neutralen Linie im Punkte R nimmt,

$$P_1 \sin \vartheta = P' - P'' = \frac{E}{R} \sum_0^{K_1} \varrho \triangle K - \frac{E}{R} \sum_0^{K_2} \varrho \triangle K,$$

indem die Elastizitätskräfte P′ und P″ gleichfalls in perpendikularen Richtungen zu PT oder parallel zu der Komponente $P_1 \sin \vartheta$ wirken, und einander entgegengesetzt sind.

Da K den ganzen Querschnitt PT und h den Abstand seines Schwerpunktes von der in seiner Ebene liegeuden und auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe bezeichnet; so hat man auch (nach §. 18)

$$hK = \sum_0^{K_1} \varrho \triangle K - \sum_0^{K_2} \varrho \triangle K$$

und demnach

$$P_1 \sin \vartheta = \frac{EhK}{R};$$

mithin

$$h = \frac{RP_1}{EK} \sin\vartheta \;\ldots.\; (504).$$

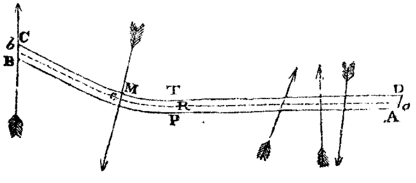
Dieser Ausdruck stellt den Abstand der neutralen Linie von dem Schwerpunkte irgend eines Querschnittes PT des Stabes oder vielmehr von der durch diesen Schwerpunkt gehenden und auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe dar. Jenachdem der Winkel ϑ und mithin der Werth dieses Ausdruckes positiv oder negativ ist, muß dieser Abstand von dem Schwerpunkte aus nach der ausgedehnten oder nach der zusammengedrückten Seite des Stabes gemessen werden. Hieraus folgt, daß die neutrale Fläche die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte der Schicht AB in demjenigen Punkte durchschneidet, in welchem $\vartheta = o$ ist, oder in welchem die Normale auf der neutralen Fläche der Richtung von P parallel ist.

§. 358. Fall, in welchem die biegende Kraft P_1 auf der Länge des Stabes nahe zu perpendikular steht.

In diesem Falle ist ϑ und mithin auch $\sin\vartheta$ ungemein klein, solange die Biegung für einen jeden Punkt R der neutralen Linie gering ist. Unter diesen Umständen ist daher auch h sehr klein und die neutrale Fläche des Stabes geht sehr nahe durch die Schwerpunkte seiner Querschnitte PT.

§. 359. Der Krümmungshalbmesser der neutralen Fläche eines Stabes.

Da die auf den Theil APTD des Stabes angebrachten Kräfte untereinander im Gleichgewichte sind; so muß das Prinzip der Gleichheit der Momente auf dieselben Anwendung finden. Nimmt man daher die Axe, welche durch den Punkt R geht und auf der Biegungsebene perpendikular steht, und demnach ganz in der neutralen Fläche



liegt, als diejenige an, von welcher aus die Momente gemessen werden sollen, und bemerkt, daß die elastischen Kräfte, welche durch die Ausdehnung des Materiales bei **RP** und durch die Zusammendrückung desselben bei **RT** hervorgerufen werden, die Masse **APTD** nach Ein und derselben Seite um die Axe **R** zu drehen streben, daß ferner ein jeder Druck auf ein Element $\triangle K$ des Querschnittes **PT** (nach Gleichung 490 und §. 357) durch $\frac{E}{R}\varrho\triangle K$, und mithin das Moment dieses Druckes in Beziehung zur Axe **R** durch $\frac{E}{R}\varrho^2\triangle K$ dargestellt wird; so hat man zuvörderst für die Summe der Momente aller elastischen Kräfte von **PT** den Ausdruck $\frac{E}{R}\Sigma\varrho^2\triangle K=\frac{EJ}{R}$, worin **J** das Trägheitsmoment der Fläche des Querschnittes **PT** in Beziehung zu der Axe **R** bezeichnet. Beachtet man nun ferner, daß wenn p die Länge des Perpendikels vom Punkte **R** auf die Richtung irgend einer an dem Theile **APTD** angebrachten Kraft **P** bezeichnet, Pp das Moment dieser Kraft und ΣPp die Summe der Momente aller ähnlichen an jenem Theile des Stabes angebrachten Kräfte darstellt; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{EJ}{R}=\Sigma Pp\\ \text{oder}\\ \dfrac{1}{R}=\dfrac{\Sigma Pp}{EJ}\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\;(505).$$

§. 360. **Der Krümmungshalbmesser eines Stabes, dessen Biegung gering ist, und bei welchem die Richtung der biegenden Kraft nahe zu auf seiner Länge perpendikular steht.**

In diesem Falle kommt die neutrale Linie einer geraden sehr nahe, welche auf den Richtungen der biegenden Kräfte perpendikular steht. Bezeichnet man daher den Abstand des Angriffspunktes einer Kraft **P** von dem Querschnitte **PT** längs der Richtung des Stabes mit x; so hat man hier $p = x$ und die Gleichung (505) wird

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{R}} = \Sigma \mathrm{P} p \\ \text{oder} \\ \dfrac{1}{\mathrm{R}} = \dfrac{\Sigma \mathrm{P} x}{\mathrm{EJ}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (506).$$

Da hier, bei der perpendikularen Richtung der Kräfte P, ϑ sehr nahe gleich null, also auch in Gleichung (504) h sehr nahe gleich null ist; so geht die neutrale Fläche durch die Schwerpunkte der Querschnitte des Stabes (s. §. 358) und J bezeichnet demnach das Trägheitsmoment des Querschnittes K in Beziehung zu einer durch seinen Schwerpunkt gehenden und auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe.

§. 361. Der Werth des Trägheitsmomentes J für den Querschnitt eines Stabes in Beziehung zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe.

Bei der Abhandelung der Trägheitsmomente für Körper von verschiedenen geometrischen Formen (§. 82 ff.) hat man diese immer als Massen von einer räumlichen Ausdehnung nach drei Dimensionen betrachtet, wogegen das Trägheitsmoment J des Querschnittes eines Stabes, welches in Gleichung (505) auftritt und die Krümmung des gebogenen Stabes bestimmt, das der geometrischen Fläche dieses Querschnittes bezeichnet. Kennt man indessen das Trägheitsmoment eines scheibenförmigen Körpers in Beziehung zu irgend einer der Scheibenfläche parallelen Axe; so erhält man offenbar das Trägheitsmoment einer der Scheibe parallelen Fläche in Beziehung zu derselben in ihrer Ebene liegenden Axe, wenn man zuvörderst in der Formel für das Trägheitsmoment des scheibenförmigen Körpers die Dicke der Scheibe unendlich gering setzt und alsdann das Resultat durch die unendlich geringe Dicke der Scheibe dividirt. Die Nothwendigkeit der letzteren Division leuchtet ein, wenn man beachtet, daß $\Sigma \varrho^2 \triangle \mathrm{K}$ der Ausdruck für das Trägheitsmoment einer Fläche, dagegen $\Sigma \varrho^2 \triangle K . \alpha$ der für das Trägheitsmoment eines ähnlichen scheibenförmigen Körpers von unendlich geringer Dicke α ist; der erstere Ausdruck wird aus dem letzteren offenbar durch eine Division mit der konstanten Größe α erhalten, wenn man gleichzeitig bei der Bestimmung der Werthe für ϱ $\alpha = o$ setzt.

Hierdurch ergeben sich folgende Werthe für J.

§. 362. Für einen Stab mit rechtwinkligem Querschnitte von der Breite b und der Höhe c (nach Gleichung 61)

$$J = \tfrac{1}{12} b c^3 = \tfrac{1}{12} K c^2.$$

§. 363. Für einen Stab mit dreieckigem Querschnitte von der Grundlinie b und der Höhe c (nach Gleichung 63)

$$J = \tfrac{1}{12} b c (\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{3} c^2) = \tfrac{1}{6} K (\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{3} c^2).$$

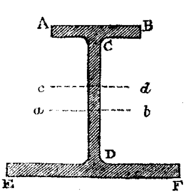
§. 364. Für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitte von dem Halbmesser c (nach Gleichung 66).

$$J = \tfrac{1}{4} \pi c^4 = \tfrac{1}{4} K c^2.$$

§. 365. Für einen hohlen kreisförmig zylindrischen Stab, dessen äußerer Halbmesser c_1 und dessen innerer Halbmesser c_2 ist,

$$J = \tfrac{1}{4} \pi (c_1{}^4 - c_2{}^4) = \tfrac{1}{4} K (c_1{}^2 + c_2{}^2).$$

§. 366. Um das Trägheitsmoment J für einen prismatischen Körper, dessen Querschnitt die seitstehende Form hat, in Beziehung zu einer durch den Schwerpunkt der Figur gehenden Axe ab zu bestimmen; so bezeichne man die Breite des Rechteckes AB mit b_1, seine Höhe mit c_1, ebenso die Breite und Höhe des Rechteckes EF resp. mit b_2 und c_2 und die Breite und Höhe des Rechteckes CD resp. mit b_3 und c_3; ferner sei J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung zu der durch die Mitte von CD



gehenden Axe cd, A_1, A_2, A_3 seien resp. die Flächen der drei Rechtecke und A die Fläche des ganzen Querschnittes.

Nun sind die Trägheitsmomente der verschiedenen Rechtecke in Beziehung zu Axen, welche durch ihre Schwerpunkte gehen und zu cd parallel sind, resp. durch $\frac{1}{12} b_1 c_1^3, \frac{1}{12} b_2 c_2^3, \frac{1}{12} b_3 c_3^3$ und die Abstände dieser Axen von der Axe cd resp. durch $\frac{1}{2}(c_1+c_3), \frac{1}{2}(c_2+c_3), o$ dargestellt. Demnach hat man (Gleichung 58)

$$J_1 = \tfrac{1}{12} b_1 c_1^3 + \tfrac{1}{4}(c_1+c_3)^2 A_1 + \tfrac{1}{12} b_2 c_2^3 + \tfrac{1}{4}(c_2+c_3)^2 A_2 + \tfrac{1}{12} b_3 c_3^3.$$

Es ist aber

$$A_1 = b_1 c_1, \; A_2 = b_2 c_2, \; A_3 = b_3 c_3;$$

mithin

$$J_1 = \tfrac{1}{12}(A_1 c_1^2 + A_2 c_2^2 + A_3 c_3^2) + \tfrac{1}{4}(c_1+c_3)^2 A_1 + \tfrac{1}{4}(c_2+c_3)^2 A_2.$$

Bezeichnet h den Abstand zwischen den Axen ab und cd, so hat man (nach §. 18) $hA = \frac{1}{2}(c_2+c_3)A_2 - \frac{1}{2}(c_1+c_3)A_1$ und (nach Gleichung 58) $J = J_1 - h^2 A$. Hieraus folgt

$$J = \tfrac{1}{12}(A_1 c_1^2 + A_2 c_2^2 + A_3 c_3^2)$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(c_1+c_3)^2 A_1 + (c_2+c_3)^2 A_2)] - \tfrac{1}{4} \frac{[(c_2+c_3)A_2 - (c_1+c_3)A_1]^2}{A} \quad \ldots\ldots (507).$$

Wenn c_1 und c_2 im Vergleich zu c_3 sehr gering sind; so erhält man, wenn man in dieser Gleichung die in c_1 und c_2 multiplizirten Glieder gegen die übrigen vernachlässigt und gehörig reduzirt,

$$J = \tfrac{1}{12}\left[A_3 + 3\left(\frac{4A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3}{A}\right)\right] c_3^2 \quad \ldots\ldots (508).$$

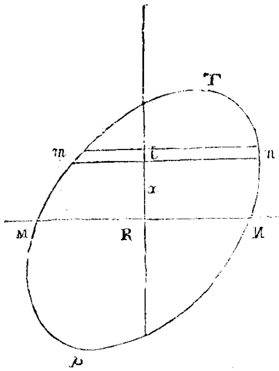
Wenn die Flächen AB und EF in jeder Hinsicht einander gleich sind; so hat man aus Gleichung (507)

$$J = \tfrac{1}{6} A_1 \left[c_1^2 + 3(c_1+c_3)^2\right] + \tfrac{1}{12} A_3 c_3^2 \quad \ldots\ldots (509).$$

und für die Voraussetzung, daß c_1 im Vergleich zu c_3 sehr klein sei, aus Gleichung (508)

$$J = \tfrac{1}{12}(6A_1 + A_3) c_3^2 \quad \ldots\ldots (509^a).$$

§. 367. Um allgemein das Trägheitsmoment J irgend einer Fläche MPNT in Beziehung zu einer in derselben liegenden Axe MN zu bestimmen; so sei mn irgend ein zur Axe MN paralleles Element von unendlich geringer Breite dx, der Abstand Rt desselben von der Axe sei gleich x und seine Länge $mn = y$. Alsdann ist das Trägheitsmoment dieses Elementes in Beziehung zu der Axe MN $= x^2 . y dx$, und mithin die Summe der Trägheitsmomente aller ähnlichen Elemente des Theiles MNT, wenn man den Abstand des höchsten Punktes T der Begränzungslinie der Fläche von der Axe MN mit x_1 bezeichnet,



$$\int_0^{x_1} y x^2 \, dx.$$

Ebenso hat man für die Summe der Trägheitsmomente aller Elemente des unteren Theiles MNP, wenn man mit x_2 den Abstand des tiefsten Punktes P der Begränzungslinie von der Axe MN bezeichnet

$$\int_0^{x_2} y x^2 \, dx,$$

und demnach für das Trägheitsmoment der ganzen Fläche MPNT in Beziehung zu der Axe MN

$$J = \int_0^{x_1} y x^2 \, dx + \int_0^{x_2} y x^2 \, dx.$$

Substituirt man hierin für y seinen Werth als Funktion von x; so ergibt die Integration der vorstehenden Formel den gesuchten Werth von J.

Wenn die Richtungen der auf den Stab angebrachten Kräfte auf seiner Oberfläche nicht sehr nahe perpendikular stehen, sodaß der Werth von ϑ nicht gleich null gesetzt werden darf; so ist das Trägheitsmoment des Querschnittes K nicht für eine durch den Schwerpunkt desselben gehende, sondern für eine um h von demselben abstehende Axe (Gleichung 504) zu nehmen. Hätte man nun aber nach der vorstehenden Formel das Trägheitsmoment J in Beziehung zu der durch den Schwerpunkt gehenden Axe berechnet; so würde man für den Werth J_1 des anderen Trägheitsmomentes, welches in die Formel (505) eintritt, nach §. 79

$$J_1 = h^2 K + J$$

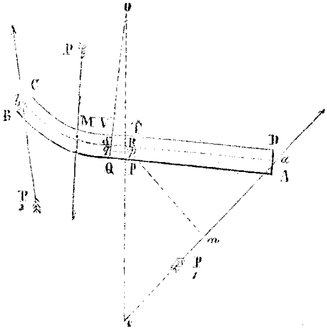
haben. Der Abstand h ist jedoch nicht im voraus bekannt; derselbe ist vielmehr eine Funktion des Krümmungshalbmessers R der neutralen Fläche (Gleichung 504), dessen Werth erst durch die folgenden Untersuchungen gefunden wird.

Der Inhalt K des Querschnittes ergibt sich nach der bekannten Formel

$$K = \int_0^{x_1} y\,dx + \int_0^{x_2} y\,dx.$$

§. 368. **Betrag der Arbeit, welche auf die Biegung eines Stabes verwendet werden muß, wenn die biegenden Kräfte beliebige Richtungen haben.**

Wenn $\triangle P'$ die Kraft bezeichnet, welche wirksam gewesen sein muß, um die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Fiberelementes pq bei der Biegung des Stabes zu bewirken, und



wenn $\triangle x$ die Länge dieses Elementes vor der Biegung und $\triangle K$ einen Querschnitt bezeichnet; so wird die Arbeit, welche auf diese Ausdehnung oder Zusammendrückung verwendet werden mußte (nach Gleichung 492, welche hier auch für den Fall der Zusammendrückung angenommen wird; s. die Schlußbemerkung zu §. 353) durch $\frac{1}{2}\,\frac{(\triangle P')^2}{E}\,\frac{\triangle x}{\triangle K}$ dargestellt. Nach

Gleichung (503) ist aber $\triangle P' = \frac{E\varrho}{R} \triangle K$; man hat also für die auf die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Fiberelementes pq verwendete Arbeit den Ausdruck

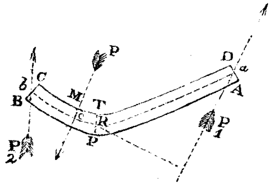
$$\tfrac{1}{2}\,\frac{E \,.\, \triangle x}{R^2}\,\varrho^2 \triangle K.$$

Da etwas Ähnliches von der auf die Ausdehnung oder Zusammendrückung einer jeden anderen Fiber des elementaren Körpertheiles **PTVQ** verwendeten Arbeit gilt; so folgt, daß die ganze Arbeit, welche auf die Biegung dieses Elementes des Stabes verwendet werden mußte, durch $\frac{1}{2}\frac{E\triangle x}{R^2}\Sigma\varrho^2 \triangle K$ oder durch $\frac{1}{2}\frac{EJ}{R^2}\triangle x$ dargestellt ist, da $\Sigma\varrho^2 \triangle K$ das Trägheitsmoment **J** des Querschnittes **PT** in Beziehung zu einer auf der Ebene **ABCD** perpendikular stehenden und durch den Punkt **R** gehenden Axe darstellt. Bezeichnet demnach a_1 die Länge desjenigen Theiles des Stabes, welcher vor der Bewegung zwischen **D** und **M** liegt, und mithin auch die Länge des Theiles ac der neutralen Linie nach der Biegung; so hat man für die gesammte Arbeit, welche zu der Biegung des Theiles **AM** des Stabes erforderlich war $\frac{1}{2}E\int_0^{a_1}\frac{J}{R^2}\,dx$. Nach Gleichung (505) hat man aber, da hier auf den Theil **AM** nur die Eine Kraft P_1 wirkt, $\frac{1}{R^2} = \frac{P_1{}^2 p_1{}^2}{E^2 J^2}$ und $\frac{J}{R^2} = \frac{P_1{}^2 p_1{}^2}{E^2 J}$, worin p_1 den veränderlichen perpendikularen Abstand der Kraft P_1 von dem Punkte **R** bezeichnet. Substituirt man diesen Werth in die vorstehende Beziehung, und bezeichnet die auf die Biegung des Theiles **AM** des Stabes verwendete Arbeit mit u_1; so kommt

$$u_1 = \frac{P_1{}^2}{2E}\int_0^{a_1}\frac{p_1{}^2}{J}\,dx \;\ldots.\; (510).$$

§. 369. Betrag der Arbeit, welche auf die Biegung eines Stabes von gleichmäßigen Dimensionen verwendet werden muß, wenn die biegenden Kräfte auf der Oberfläche des Stabes nahe perpendikular stehen.

In diesem Falle ist J konstant (§. 360) und $p_1 = x$. Integrirt man hiernach die (Gleichung 510) zwischen den Gränzen o und a_1; so erhält man für die Arbeit u_1, welche auf die Biegung des Theiles AM des Stabes verwendet werden mußte,



$$u_1 = \tfrac{1}{6} \frac{P_1^2 a_1^3}{EJ} \quad \dots . (511).$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die zur Biegung des Theiles BM des Stabes erforderliche Arbeit u_2, wenn man $bc = a_2$ setzt,

$$u_2 = \tfrac{1}{6} \frac{P_2^2 a_2^3}{EJ},$$

und mithin für die gesammte Arbeit U, welche zur Biegung des ganzen Stabes erforderlich ist,

$$U = \frac{P_1^2 a_1^3 + P_2^2 a_2^3}{6EJ}.$$

Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente hat man aber, wenn a die ganze Länge des Stabes bezeichnet, zwischen den drei auf den Stab angebrachten Kräften P_1, P_2 und P die Beziehungen

$$P_1 a = P a_2 \text{ und } P_2 a = P a_1.$$

Eliminirt man demnach vermittelst dieser Gleichungen die Kräfte P_1 und P_2 und reduzirt gehörig; so erhält man für die gesammte Arbeit U den Werth

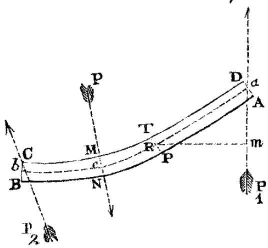
$$U = \tfrac{1}{6} \frac{(a_1 a_2)^2 P^2}{a EJ} \quad \dots . (512).$$

Wenn die Kraft P in der Mitte des Stabes angebracht ist; so hat man $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} a$, und mithin

$$U = \frac{a^3 P^2}{96 EJ} \quad \ldots . \quad (513).$$

§. 370. **Die lineäre Einbiegung eines Stabes, wenn die Richtung der biegenden Kraft auf seiner Oberfläche perpendikular steht.**

Nimmt man an, der Querschnitt MN des Stabes sei befestigt, sodaß die Biegung auf jeder Seite desselben stattfindet; so hat man nach Gleichung (40), wenn u_1 die auf die Biegung des Theiles AM verwendete Arbeit der Kraft P_1 und D_1 die Abbiegung des Angriffspunktes dieser Kraft in perpendikularer Richtung zu



der Oberfläche des Stabes bezeichnet, $u_1 = \int P_1 \, d D_1$ *); mithin $P_1 = \frac{d u_1}{d D_1}$, oder wenn man u_1 als eine Funktion von P_1 und P_1 als eine Funktion von D_1 betrachtet,

$$P_1 = \frac{d u_1}{d P_1} \cdot \frac{d P_1}{d D_1}.$$

Nach Gleichung (511) ist aber

$$\frac{d u_1}{d P_1} = \frac{1}{3} \frac{P_1 a_1^3}{EJ};$$

mithin

$$P_1 = \frac{1}{3} \frac{P_1 a_1^3}{EJ} \cdot \frac{d P_1}{d D_1}$$

*) In dieser Gleichung hat man sich unter P_1 und D_1 keine konstanten Größen zu denken, sondern unter P_1 diejenige Kraft, welche in irgend einem Augenblicke der vorsichschreitenden Biegung des Stabes gerade erforderlich ist, um die daselbst stattfindende Einbiegung D_1 zu erhalten. Unter dieser Voraussetzung variirt die Kraft P_1 mit der zunehmenden Einbiegung, und entspricht genau dem Falle, wo man auf den Stab in der Richtung jener Kraft einen allmählig stärker werdenden Druck ausübt, der bis zu jedem beliebigen Betrage gesteigert werden kann, aber in jedem Augenblicke der Biegung mit der Größe D_1 der Einbiegung in einer bestimmten Beziehung steht, deren Ermittelung der Gegenstand dieses Paragraphes ist.

oder auch

$$\frac{dD_1}{dP_1} = \frac{1}{3}\frac{a_1^3}{EJ}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$D_1 = \frac{a_1^3 P_1}{3EJ} \quad \dots. (514).$$

Wenn die ganze Arbeit behuf Biegung des Stabes von der mittleren Kraft P verrichtet wäre, sodaß die Angriffspunkte von P_1 und P_2 keine Bewegungen in den Richtungen dieser Kräfte erlitten hätten (§. 52); so würde man erhalten, wenn man mit D die Einbiegung des Angriffspunktes von P bezeichnete und mit der Gleichung (512) ebenso verführe, wie vorhin mit Gleichung (511),

$$D = \frac{(a_1 a_2)^2 P}{3aEJ}, \quad \dots. (515).$$

und wenn die Kraft P in der Mitte des Stabes angebracht wäre, sodaß man $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$ hätte,

$$D = \frac{a^3 P}{48EJ} \quad \dots. (516).$$

Eliminirt man P_1 zwischen den Gleichungen (511) und (514) und P zwischen den Gleichungen (512) und (515); so erhält man

$$u_1 = \frac{3EJD_1^2}{2a_1^3}, \; U = \frac{3aEJD^2}{2(a_1 a_2)^2} \quad \dots. (517).$$

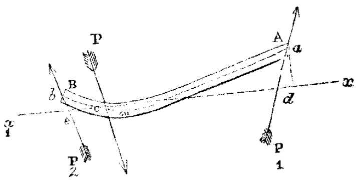
Durch diese Gleichungen ist die auf die Biegung des Stabes verwendete Arbeit als Funktion der Einbiegung selbst bestimmt, während sie durch die Gleichungen (511) und (512) als Funktion der biegenden Kräfte gegeben ist.

§. 371. **Bedingungen für die Biegung eines Stabes, auf welchen drei Kräfte angebracht sind, deren Richtungen auf der Oberfläche desselben nahe zu perpendikular stehen.**

acb sei die Durchschnittslinie der neutralen Fläche mit der Biegungsebene und *c* der gemeinschaftliche Durchschnitt jener Linie mit der Richtung der mittleren Kraft P.

Zieht man xx_1 parallel zu der Länge des Stabes vor der

Biegung, nimmt diese Linie zu der Abszissenaxe und den Punkt c zum Anfangspunkte der rechtwinkligen Koordinaten; so hat man nach einer bekannten Formel für den Krümmungshalbmesser $\mathbf{R}$ der Kurve ac in irgend einem Punkte, dessen Koordinaten x, y sind,



$$\mathbf{R} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

und demnach

$$\frac{1}{\mathbf{R}} = \frac{d^2 y}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Kurve in dem betreffenden Punkte gegen die positive Seite der Abszissenaxe konvex gekrümmt sei; hätte die Abszissenaxe eine solche Lage, daß die Kurve der positiven Seite derselben die konkave Krümmung zukehrte; so würde man bekanntlich $\frac{1}{\mathbf{R}} = -\frac{d^2 y}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$ haben.

Da nun die Biegung des Stabes als sehr gering vorausgesetzt wird; so wird auch die Neigung der Tangente der neutralen Linie gegen die Axe cx in allen Punkten sehr gering sein, sodaß $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen die Einheit vernachläßigt werden und demnach $\frac{1}{\mathbf{R}} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ gesetzt werden kann. Substituirt man diesen Werth in Gleichung (506) und beachtet, daß hier p durch $a_1 - x$, anstatt durch x, wie in §. 362, dargestellt ist; so erhält man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mathbf{P}_1 (a_1 - x)}{\mathbf{EJ}}, \quad \ldots . \; (518).$$

wobei die Richtung der Kraft $\mathbf{P}_1$ als nahe perpendikular zu der Oberfläche des Stabes und demnach $\mathbf{J}$ als konstant angenommen wird. Multiplizirt man auf beiden Seiten mit dx, so kommt

$$\frac{d^2 y}{dx} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{P_1(a_1 - x)\,dx}{EJ}.$$

Integrirt man nun zwischen den Gränzen o und x, und bezeichnet die Neigung der Tangente im Punkte c gegen die Axe cx mit β, sodaß $\tang\beta$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ ist, welcher dem Punkte c oder dem Werthe $x = o$ entspricht; so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} - \tang\beta = \frac{P_1}{EJ}(a_1 x - \tfrac{1}{2}x^2) \quad \ldots . \quad (519).$$

Multiplizirt man wiederum auf beiden Seiten mit dx, integrirt alsdann nochmals zwischen den Gränzen o und x, und beachtet daß für $x = o$ auch $y = o$ sein muß; so erhält man

$$y = \frac{P_1}{EJ}(\tfrac{1}{2}a_1 x^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + x\tang\beta \quad \ldots . \quad (520).$$

Verfährt man ebenso in Beziehung zu dem Theile bc der neutralen Linie, bemerkt jedoch, daß für diese Kurve $-\tang\beta$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ ist, welcher dem Punkte c oder dem Werthe $x = o$ entspricht; so ergeben sich die Formeln

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P_2(a_2 - x)}{EJ},$$

$$\frac{dy}{dx} + \tang\beta = \frac{P_2}{EJ}(a_2 x - \tfrac{1}{2}x^2), \quad \ldots . \quad (521).$$

$$y = \frac{P_2}{EJ}(\tfrac{1}{2}a_2 x^2 - \tfrac{1}{6}x^3) - x\tang\beta \quad \ldots . \quad (522).$$

Wenn D_1 und D_2 die Einbiegungen resp. an den Punkten a und b bezeichnen und $cd = ca = a_1$ und $ce = cb = a_2$ angenommen wird; so hat man nach Gleichung (520)

$$D_1 = \frac{P_1 a_1^3}{3\,EJ} + a_1 \tang\beta,$$

nach Gleichung (522)

$$D_2 = \frac{P_2 a_2^3}{3\,EJ} - a_2 \tang\beta.$$

Wenn die Kräfte P_1 und P_2 durch die Widerstände fester Punkte erzeugt werden, sodaß die mittlere Kraft P die Biegung allein bewirkt; so ist $D_1 = D_2$. Subtrahirt man unter dieser Voraussetzung die letzte Gleichung von der vorhergehenden; so kommt

$$o = \frac{P_1 a_1^3 - P_2 a_2^3}{3 EJ} + (a_1 + a_2) \operatorname{tang} \beta.$$

Nun ist

$$P_1 a = P a_2, P_2 a = P a_1 \text{ und } a_1 + a_2 = a;$$

demnach

$$P_1 a_1^3 - P_2 a_2^3 = \frac{P a_2 a_1^3 - P a_1 a_2^3}{a} = P a_1 a_2 (a_1 - a_2),$$

und wegen der vorstehenden Gleichung

$$\operatorname{tang} \beta = - \frac{P a_1 a_2 (a_1 - a_2)}{3 a EJ} \quad \ldots. \ (523).$$

Man sieht, daß $\operatorname{tang} \beta$ einen negativen Werth hat, wenn $a_1 > a_2$ ist, sodaß alsdann der tiefste Punkt m der Einbiegung des Stabes in dem Theile ac der neutralen Linie liegt.

Wenn β_1 und β_2 die Neigungen der neutralen Linie gegen die Axe xx_1 resp. in den Punkten a und b bezeichnen; so hat man nach den Gleichungen (519) und (521)

$$\operatorname{tang} \beta_1 - \operatorname{tang} \beta = \frac{P_1 a_1^2}{2 EJ},$$

$$\operatorname{tang} \beta_2 + \operatorname{tang} \beta = \frac{P_2 a_2^2}{2 EJ}.$$

Substituirt man hierin für $\operatorname{tang} \beta$ den Werth aus Gleichung (523), eliminirt P_1 und P_2 mit Hülfe der zwischen den drei Kräften P_1, P_2 und P bestehenden Beziehungen; so erhält man

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \frac{P a_1 a_2 (a_1 + 2 a_2)}{6 a EJ} \text{ und } \operatorname{tang} \beta_2 = \frac{P a_1 a_2 (a_2 + 2 a_1)}{6 a EJ} \quad \ldots. \ (524).$$

Um den Punkt m zu bestimmen, in welchem die Tangente der neutralen Linie zu der Axe xcx_1 oder zu der ursprünglichen

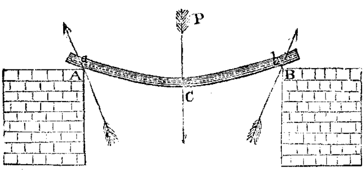
Länge des Stabes parallel ist, hat man in der Gleichung (519) $\frac{dy}{dx} = o$ zu setzen. Substituirt man alsdann für $\tang \beta$ seinen Werth aus Gleichung (523), für P_1 den Werth $\frac{P a_2}{a}$ und löſ't die erhaltene Gleichung für x auf; so erhält man für den Abstand des Punktes m von c gegen a den Ausdruck

$$a_1 - \sqrt{\tfrac{1}{3} a_1 (a_1 + 2 a_2)} \dots . (525).$$

Man erkennt leicht, daß die Wurzelgröße nur negativ genommen werden darf, da dieselbe, wenn sie positiv genommen würde, dem Ausdrucke einen Werth $> a_1$ ertheilen würde, was offenbar eine Ungereimtheit in sich schließt.

§. 372. Die Länge der neutralen Linie, wenn der Stab in der Mitte belastet ist.

Die Richtungen der Widerstände gegen die Enden des Stabes seien auf der Oberfläche desselben nahe zu perpendikular. Bezeichnet man mit x und y die horizontalen und vertikalen Koordinaten der neutralen Linie vom Punkte a aus, mit a den horizontalen



Abstand AB der beiden Stützpunkte und beachtet, daß für dieses Koordinatensystem, wo die Kurve der Abszissenaxe die konkave Seite zukehrt, $\frac{1}{R} = -\frac{d^2 y}{dx^2}$ und daß der Widerstand bei A oder B gleich $\frac{1}{2}$ P ist; so erhält man aus Gleichung (506)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} P x}{EJ}$$

oder

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{P}{2EJ} x \, dx.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = const. - \frac{P}{4EJ} x^2,$$

und da man für $x = \frac{a}{2}$ $\frac{dy}{dx} = o$ haben muß,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4EJ}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right).$$

Bezeichnet man die Länge der Kurve acb mit s, also ac mit $\frac{s}{2}$; so hat man

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

oder da die Biegung sehr ging, also $\frac{dy}{dx}$ in jedem Punkte der neutralen Linie sehr gering ist, sodaß man höhere, als die zweite Potenz dieser Größe, bei der Entwickelung des Binoms $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe vernachlässigen kann,

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Substituirt man hierin für $\frac{dy}{dx}$ den vorhergehenden Werth; so erhält man

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[1 + \frac{P^2}{32 E^2 J^2}\left(\frac{a^4}{16} - \frac{a^2 x^2}{2} + x^4\right)\right] dx,$$

und wenn man die Integration ausführt,

$$s = a + \frac{P^2 a^5}{960 . E^2 J^2} \quad \ldots . \ (526).$$

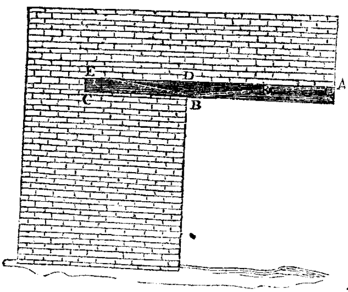
Eliminirt man mit Hülfe der Gleichung (516) die Kraft P, indem man die Größe D der Einbiegung des Stabes im Punkte C einführt; so erhält man statt der vorstehenden Gleichung

$$s = a + \frac{12}{5} \frac{D^2}{a}.$$

a bezeichnet hierin den horizontalen Abstand der beiden Unterstützungspunkte **A** und **B** und s die Länge der neutralen Linie zwischen diesen Punkten oder die ursprüngliche Länge des Stabes vor der Biegung. In den früheren Formeln sind zwar öfters die Größen a und s miteinander verwechselt; man bemerkt jedoch, daß wenn **D** im Vergleich zu a einen sehr geringen Werth hat, was in den meisten Fällen der Praxis der Fall ist, hierdurch nur unbedeutende Fehler begangen sind, welche auf die Resultate nur einen geringfügigen Einfluß haben.

§. 373. **Biegung eines Balkens, von welchem Ein Theil fest vermauert ist und der andere Theil eine gleichförmig über seine Länge vertheilte Belastung zu tragen hat.**

Die Koordinaten der neutralen Linie werden von dem Punkte **B** aus, wo der Balken in das Mauerwerk eingelassen ist, gemessen, die Länge des Theiles **AD**, welcher die Belastung zu tragen hat, sei gleich



a und die Größe dieser Belastung (mit Einschluß des Gewichtes des Balkens selbst) auf eine jede Längeneinheit von **AD** gleich μ. Stellen alsdann x und y die horizontalen und vertikalen Koordinaten irgend eines Punktes **R** der neutralen Linie dar, so sind die auf den Theil **AR** des Balkens wirkenden und im Gleichgewichte befindlichen Kräfte die Last $\mu(a-x)$ und die in dem Querschnitte bei **R** ins Leben gerufenen elastischen Kräfte. Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente hat man daher, wenn man die in **R** auf der Biegungsebene perpendikular stehende Linie als die Axe annimmt, von welcher aus die Momente gemessen werden sollen, und bemerkt, daß die über **AR** gleichförmig vertheilte Belastung $\mu(a-x)$ dieselbe Wirkung hervorbringt, als wenn sie in der Mitte jener Linie oder in dem Abstande $\frac{1}{2}(a-x)$ von **R** vereinigt wäre, und daß die Summe der Momente der elastischen Kräfte im Querschnitte bei **R** in Beziehung zu der Axe **R** durch **EJ** (§. 360) oder durch $EJ\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (§. 371) dargestellt ist,

$$\mathrm{EJ}\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\mu(a-x)^2$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{2\mathrm{EJ}}(a-x)^2 \;\ldots\ldots\; (527).$$

Integrirt man diese Gleichung zweimal, nachdem man zuvor mit dx multiplizirt hat, und beachtet hinsichtlich der Bestimmung der Konstanten, daß für $x = o$ auch $\frac{dy}{dx} = o$ und $y = o$ sein muß, weil der Theil BC des Balkens ungekrümmt bleibt; so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{6\mathrm{EJ}}\left[-(a-x)^3 + a^3\right] \;\ldots\ldots\; (528).$$

$$y = \frac{\mu}{24\mathrm{EJ}}\left[(a-x)^4 + 4a^3 x - a^4\right], \;\ldots\ldots\; (529).$$

welches letztere die Gleichung der neutralen Linie ist.

Setzt man in Gleichung (529) $x = a$ und beachtet, daß der entsprechende Werth von y die Einbiegung D am Endpunkte A des Balkens darstellt; so ergibt sich

$$\mathrm{D} = \frac{\mu a^4}{8\mathrm{EJ}} \;\ldots\ldots\; (530).$$

Bezeichnet man die Neigung der Tangente der neutralen Linie im Punkte A gegen den Horizont mit β, setzt darauf in Gleichung (528) $x = a$ und beachtet, daß wenn $x = a$ ist, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\beta$ sein muß; so bekommt man

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\mu a^3}{6\mathrm{EJ}} \;\ldots\ldots\; (531).$$

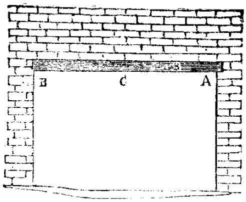
Wäre außer der gleichförmigen Belastung noch eine einzelne vertikale Kraft P in dem Abstande p vom Punkte B auf den Balken angebracht, deren Moment in Beziehung zu der Axe R also $\mathrm{P}(p-x)$ wäre; so würde man offenbar statt Gleichung (527) die folgende

$$\mathrm{EJ}\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\mu(a-x)^2 + \mathrm{P}(p-x)$$

zu setzen haben, aus welcher sich durch ein Integrationsverfahren, ähnlich dem vorhergehenden, die entsprechenden Werthe für **D** und tang β leicht ergeben.

§. 374. Biegung eines Balkens, welcher an seinen Enden unterstützt ist und eine über seine Länge gleichförmig vertheilte Belastung zu tragen hat.

Man bezeichne die Länge **AB** des Balkens mit a, die Belastung für jede Längeneinheit (mit Einschluß des eigenen Gewichtes des Balkens) mit μ und nehme x und y für die horizontalen und vertikalen Koordinaten irgend eines Punktes **R** der neutralen Linie, vom Anfangspunkte **A** aus gerechnet. Die an dem Theile **AR** wirkenden und im Gleichgewichte befindlichen Kräfte sind die Belastung μx dieses Theiles, welche als in ihrem Schwerpunkte oder in der Mitte von **AR** vertikal nach unten wirkend gedacht werden kann, ferner der Widerstand des Punktes **A**, welcher gleich $\frac{1}{2}\mu a$ ist und vertikal von unten nach oben wirkt, und endlich die in dem Querschnitte bei **R** ins Leben gerufenen Elastizitätskräfte. Nimmt man die Momente dieser Kräfte in Beziehung zu der Axe **R** und beachtet, daß die Wirkung der über **AR** vertheilten Belastung der Wirkung des Widerstandes bei **A** gerade entgegengesetzt ist, und daß die Summe der Momente der Elastizitätskräfte im Querschnitte bei **R** in Beziehung zu der Axe **R** durch $\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{R}}$ (§. 360) dargestellt werden; so hat man



$$\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{R}} = \tfrac{1}{2}\mu a x - \tfrac{1}{2}\mu x^2.$$

Da die neutrale Linie hier der Abszissenaxe die konkave Krümmung zukehrt; so hat man (§. 371) $\frac{1}{\mathrm{R}} = -\frac{d^2y}{dx^2}$, und demnach

$$\mathrm{EJ}\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\mu a x + \tfrac{1}{2}\mu x^2$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu}{2\mathrm{EJ}}(ax - x^2) \;\ldots\; (532).$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen den Gränzen a und x, wenn man hinsichtlich der Konstanten beachtet, daß für $x = \frac{a}{2}$ $\frac{dy}{dx} = o$ sein muß, indem für diesen Werth von x die Ordinate y offenbar ihren größten Werth erreicht,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{2\mathrm{EJ}} \left\{ \frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - \tfrac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - x^3\right] \right\} \;\ldots\; (533).$$

Wenn man diese Gleichung nochmals, und zwar zwischen den Gränzen o und x integrirt, und dabei beachtet, daß für $x = o$ auch $y = o$ ist; so erhält man für die Gleichung der neutralen Linie

$$y = \frac{\mu}{2\mathrm{EJ}} \left\{ \frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] - \tfrac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 x - \frac{x^4}{4}\right] \right\} \;\ldots\; (534).$$

Setzt man hierin $x = \frac{a}{2}$, so ergibt der entsprechende Werth von y die Größe der Einbiegung D in der Mitte des Balkens; dieselbe ist

$$\mathrm{D} = \frac{5}{24}\,\frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^4}{\mathrm{EJ}} = \frac{5}{384}\,\frac{\mu a^4}{\mathrm{EJ}} \;\ldots\; (535).$$

Bezeichnet man mit β die Neigung der Tangente der neutralen Linie bei **A** oder **B** gegen den Horizont, so ergibt die Gleichung (533) in dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ den Werth von $\tang\beta$, wenn man darin $x = o$ setzt. Man erhält durch diese Substitution

$$\tang\beta = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3\mathrm{EJ}} = \frac{\mu a^3}{24\mathrm{EJ}} \;\ldots\; (536).$$

Wenn man die Gleichung (535) unter die Form

$$\mathrm{D} = \frac{\frac{5}{8}(\mu a)\,.\,a^3}{48\,\mathrm{EJ}}$$

bringt; so folgt aus Gleichung (516), daß die Einbiegung eines gleichförmig belasteten Balkens dieselbe ist, als wenn $\frac{5}{8}$ der ganzen Belastung (μa) in seinem Mittelpunkte aufgehängt wären. Vergleicht man den Werth von $\tan\beta$ aus Gleichung (536) mit dem aus Gleichung (524); so findet man, daß wenn der Balken unbelastet wäre, man in der Mitte desselben ein Gewicht $= \frac{2}{3}$ der Belastung (μa) aufsetzen müßte, um für die Neigung der neutralen Linie in den Endpunkten denselben Werth zu erhalten.

Wenn außer der gleichförmigen Belastung in der Mitte des Balkens noch die Last P aufgesetzt wäre; so würde man statt des Widerstandes $\frac{1}{2}\mu a$ des Punktes A oder B $\frac{1}{2}\mu a + \frac{1}{2}\mathrm{P}$ zu setzen haben. Hierdurch gingen die Gleichungen (532) bis (536) in die folgenden über

$$2\,\mathrm{EJ}\frac{d^2y}{dx^2} = -(\mu a + \mathrm{P})\,x + \mu x^2, \;\ldots\ldots\; (536^a).$$

$$2\,\mathrm{EJ}\frac{dy}{dx} = \frac{\mu a + \mathrm{P}}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - \frac{\mu}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - x^3\right] \ldots\ldots (536^b).$$

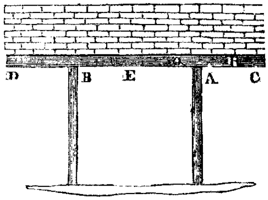
$$2\,\mathrm{EJ}\,y = \frac{\mu a + \mathrm{P}}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] - \frac{\mu}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 x - \frac{x^4}{4}\right], \ldots (536^c).$$

$$\mathrm{D} = \frac{(\frac{5}{8}\mu a + \mathrm{P})\,a^3}{48\,\mathrm{EJ}}, \;\ldots\ldots\; (536^d).$$

$$\tan\beta = \frac{(\frac{2}{3}\mu a + \mathrm{P})\,a^2}{16\,\mathrm{EJ}} \;\ldots\ldots\; (536^e).$$

§. 375. Biegung eines Balkens, welcher über seine ganze Länge gleichförmig belastet und in zwei von den beiden Enden gleich weit abstehenden Punkten unterstützt ist.

Setzt man $\mathrm{CD} = a$, $\mathrm{CA} = a_1$ und bezeichnet die Belastung auf eine jede Längeneinheit des Balkens (mit Einschluß seines eigenen Gewichtes) mit μ; so ist $\frac{1}{2}\mu a$ die von einer jeden Stütze zu tragende Last oder die Kraft, welche in dem Punkte A oder B vertikal von unten nach oben gegen den Balken wirkt. Betrachten wir nun die beiden Theile CA und AE des Balkens be-



sonders, indem wir uns durch den Punkt der neutralen Linie bei C eine horizontale Abszissenaxe gelegt denken. Alsdann leuchtet ein, daß die auf irgend eine Länge CR des Theiles CA wirkenden Kräfte die Belastung $\mu \cdot \overline{CR}$, welche man sich in der Mitte von CR vereinigt denken kann, und die in dem Querschnitte bei R auftretenden Elastizitätskräfte sind. Nimmt man die Momente beider in Beziehung zu der Axe R; so erhält man nach Gleichung (505)

$$\frac{EJ}{R} = \tfrac{1}{2} \mu x^2,$$

eine Gleichung, welche auf die ganze Ausdehnung des Theiles CA gilt. Substituirt man hierin für das Umgekehrte $\frac{1}{R}$ des Krümmungshalbmessers R seinen abgekürzten Werth aus §. 371, welcher hier $= -\frac{d^2y}{dx^2}$ ist, weil die neutrale Linie von CA in dem vorliegenden Falle der Abszissenaxe ihre konkave Krümmung zukehrt; so erhält man für den Theil CA die Gleichung

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2} \mu x^2 \ \ldots . \ (537).$$

Was die Biegung des Theiles AE betrifft; so bemerkt man, daß auf denselben die gleichförmig vertheilte Belastung in vertikaler Richtung von oben nach unten und der Widerstand $\frac{1}{2} \mu a$ der Stütze A in vertikaler Richtung von unten nach oben wirkt, und daß in Folge der Wirkung dieser Kräfte und der Biegung des Theiles CA von oben nach unten die neutrale Linie des Theiles AE eine Kurve bilden wird, welche bei A konkav und bei E konvex ist, also zwischen A und E einen Wendepunkt hat. Dessenungeachtet wird aber doch das Prinzip der Gleichheit der Momente für die ganze Ausdehnung des Theiles AE zu beiden Seiten des gedachten Wendepunktes Ein und dieselbe Gleichung ergeben. Denn angenommen, der zwischen A und E genommene Querschnitt Q liege in dem konkaven Theil der Kurve AE, welche ebenso, wie die Kurve CA auf die durch C gelegte Abszissenaxe und den Anfangspunkt C bezogen wird; so sind die auf den Balkentheil CQ wirkenden Kräfte die Belastung μx in vertikaler Richtung nach unten, der Widerstand $\frac{1}{2}\mu a$ der Stütze A in vertikaler Richtung nach oben und die im Querschnitte Q hervorgerufenen Elastizitätskräfte. Nimmt man die Momente dieser Kräfte in Beziehung zum Punkte Q und beachtet, daß wenn Q in der konkaven Krümmung der neutralen Linie liegt, die Belastung μx den Elastizitätskräften direkt entgegenwirkt; so erhält man

$$\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{R}} = \tfrac{1}{2}\mu x^2 - \tfrac{1}{2}\mu a(x - a_1)$$

oder, da hier $\frac{1}{\mathrm{R}} = -\frac{d^2 y}{dx^2}$ ist,

$$\mathrm{EJ}\frac{d^2 y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\mu x^2 + \tfrac{1}{2}\mu a(x - a_1) \;\ldots\ldots\; (538).$$

Läge nun der Querschnitt Q in der konvexen Krümmung der neutralen Linie näher an E; so würden die Momente der oben bezeichneten Kräfte in Beziehung zum Punkte Q offenbar ganz dieselben sein; aber nun würde nicht die Belastung μx, sondern der Widerstand $\frac{1}{2}\mu a$ bei A den Elastizitätskräften im Querschnitte Q direkt entgegenwirken, und man hätte demzufolge

$$\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{R}} = -\tfrac{1}{2}\mu x^2 + \tfrac{1}{2}\mu a(x - a_1).$$

Jetzt nimmt jedoch die Größe $\frac{1}{\mathrm{R}}$, da die Kurve bei Q konvex sein soll, den Werth $+\frac{d^2 y}{dx^2}$ an, und man sieht, daß die Verlegung des Punktes Q aus der konkaven in die konvexe Krümmung des Theiles AE nur eine gleichzeitige Umkehrung aller Zeichen der Gleichung (538) bewirkt, wodurch dieselbe in Nichts geändert wird, und demnach für die ganze Ausdehnung des Theiles AE der neutralen Linie Gültigkeit behält.

Bezeichnet man nun die Neigung der Tangente der neutralen Linie im Punkte A gegen den Horizont mit β, dividirt die Gleichung (537) durch $\frac{1}{2}\mu$ und integrirt dieselbe zwischen den Gränzen a_1 und x, indem man beachtet, daß für die erstere

Gränze oder für $x=a_1$ $\frac{dy}{dx}=\tan\beta$ sein muß; so erhält man

$$\frac{2EJ}{\mu}\left(\frac{dy}{dx}-\tan\beta\right)=\tfrac{1}{3}(a_1{}^3-x^3) \;\ldots\ldots\; (539).$$

Integrirt man die Gleichung (538) zwischen den Gränzen $\frac{a}{2}$ und x und beachtet, daß für $x=\frac{a}{2}$ $\frac{dy}{dx}=o$ sein muß, da die neutrale Linie in **E** mit dem Horizonte parallel ist; so kommt

$$\frac{2EJ}{\mu}\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3-x^3\right]-\frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-x^2\right]+aa_1\left[\left(\frac{a}{2}\right)-x\right] \;\ldots\ldots\; (540).$$

Da sich diese Gleichung auf den ganzen Theil **AE** der neutralen Linie bezieht; so muß man offenbar $\frac{dy}{dx}=\tan\beta$ haben, wenn man $x=a_1$ setzt. Dies ergibt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{2EJ}{\mu}\tan\beta=\tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{2}-a_1\right)\left[-2\left(\frac{a}{2}\right)^2+4\left(\frac{a}{2}\right)a_1+a_1{}^2\right] \ldots\ldots (541).$$

Substituirt man diesen Werth für $\tan\beta$ in Gleichung (539) und reduzirt; so erhält man für den Theil **CA** der neutralen Linie

$$\frac{2EJ}{\mu}\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3-x^3\right]-\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-a_1\right)^2 \;\ldots\ldots\; (542).$$

Integrirt man die Gleichung (540) zwischen den Gränzen x und a_1 und die Gleichung (542) zwischen den Gränzen o und x und bezeichnet die Einbiegung bei **C**, oder den Werth von y für $x=a_1$ mit D_1; so erhält man resp.

$$\frac{2EJ}{\mu}(D_1-y)=\tfrac{1}{12}(x^4-a_1{}^4)-\tfrac{1}{3}\frac{a}{2}(x^3-a_1{}^3)$$

$$+a_1\frac{a}{2}(x^2-a_1{}^2)+2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{6}-a_1\right)(x-a_1)$$

und

$$\frac{2EJ}{\mu}y=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-3\left(\frac{a}{2}-a_1\right)^2\right]x-\frac{1}{12}x^4, \ldots (543).$$

wovon die erstere die neutrale Linie des Theiles AE und die letztere die des Theiles CA bestimmt. Setzt man in der letzteren $x=a_1$ und beachtet, daß alsdann $y=D_1$ werden muß; so ergibt sich

$$D_1=\frac{\mu a_1}{24\,EJ}\left[6 a a_1(a-a_1)-(a^3+a_1{}^3)\right] \ldots (544).$$

Substituirt man diesen Werth von D_1 in die vorhergehende Gleichung; so erhält man für die Gleichung der neutralen Linie in dem Theile AE des Balkens

$$\frac{2EJ}{\mu}y=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-3\left(\frac{a}{2}-a_1\right)^2\right]x+\frac{1}{3}\frac{a}{2}(x-a_1)^3-\frac{1}{12}x^4$$
$$\ldots (545).$$

Setzt man hierin $x=\frac{a}{2}$ und bezeichnet die Ordinate der neutralen Linie bei E mit y_1; so hat man

$$y_1=\frac{\mu a}{48EJ}\left[3\,a^2 a_1-5\left(\frac{a}{2}\right)^3-4\,a_1{}^3\right] \ldots (546).$$

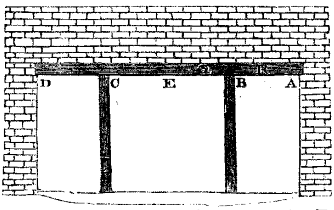
Wenn $a_1=o$ wäre, oder wenn die Belastung erst im Punkte A des Balkens anfinge; so findet man für y_1 den bereits durch Gleichung (535) bestimmten Werth, wobei das negative Zeichen nur anzeigt, daß alsdann der tiefste Punkt E unterhalb der durch A gelegten horizontalen Abszissenaxe liegt.

Bezeichnet man endlich die Einbiegung des Balkens bei E mit D; so hat man offenbar $D=D_1-y_1$, d. i.

$$D=\frac{\mu\left(\frac{a}{2}-a_1\right)^2}{24\,EJ}\left[5\left(\frac{a}{2}\right)^2-5\left(\frac{a}{2}\right)a_1-a_1{}^2\right] \ldots (547).$$

§. 376. **Biegung eines Balkens, welcher über seine Länge gleichförmig belastet und an seinen Enden A und D und außerdem in zwei von den Enden gleich weit abstehenden Punkten B und C unterstützt ist.**

Es sei auch hier $AD=a$, $AB=a_1$, der Widerstand bei A gleich P_1, der bei B gleich P_2, die Belastung der Längeneinheit des Balkens gleich μ, und die neutrale Linie werde auf eine durch A gelegte horizontale Abszissenaxe bezogen, sodaß sie dieser Axe in ihren ersten Theilen bei A die konkave Krümmung zukehrt.



Wenn R irgend ein Punkt der neutralen Linie für den Theil AB des Balkens ist, so sind die auf AR wirkenden Kräfte die Belastung μx, der Widerstand P_1 und die im Querschnitte bei R hervorgerufenen Elastizitätskräfte. Nimmt man die Momente aller dieser Kräfte in Beziehung zu der Axe R; so erhält man nach §. 362

$$\frac{EJ}{R} = \pm(\tfrac{1}{2}\mu x^2 - P_1 x),$$

jenachdem der Punkt R in der konvexen oder in der konkaven Krümmung der Kurve AB liegt. Da man nun für eine solche Lage des Punktes R nach §. 371 resp. $\frac{1}{R} = \pm\frac{d^2y}{dx^2}$ hat; so folgt für die ganze Ausdehnung der neutralen Linie zwischen A und B dieselbe Gleichung

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\mu x^2 - P_1 x \;\ldots\; (548).$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Gränzen a_1 und x und bezeichnet die Neigung der Tangente der neutralen Linie im Punkte B gegen den Horizont mit β_2, sodaß für $x=a_1$, $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\beta_2$ ist; so kommt

$$EJ\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang}\beta_2\right) = \tfrac{1}{6}\mu(x^3 - a_1^3) - \tfrac{1}{2}P_1(x^2 - a_1^2) \;\ldots\; (549).$$

Integrirt man nochmals und zwar zwischen den Gränzen o und x, sodaß für $x=o$ auch $y=o$ ist; so erhält man

$$EJ(y - x\operatorname{tang}\beta_2) = \tfrac{1}{6}\mu(\tfrac{1}{4}x^4 - a_1^3 x) - \tfrac{1}{2}P_1(\tfrac{1}{3}x^3 - a_1^2 x) \;\ldots\; (550)$$

Setzt man hierin $x = a_1$; so muß offenbar $y = o$ werden, weil die beiden festen Punkte **A** und **B** in derselben horizontalen Höhe liegen. Dies ergibt

$$\mathrm{EJ}\tang\beta_2 = \tfrac{1}{8}\mu a_1^3 - \tfrac{1}{3}\mathrm{P}_1 a_1^2 \;\ldots.\; (551).$$

Nimmt man in ähnlicher Weise x und y für die Koordinaten eines Punktes **Q** in der neutralen Linie des Balkentheiles **BC**; so sind die auf **AQ** wirkenden Kräfte die Belastung μx, die Widerstände P_1 und P_2 und die im Querschnitte bei **Q** auftretenden elastischen Kräfte. Demnach hat man für diesen Theil des Balkens

$$\mathrm{EJ}\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\mu x^2 - \mathrm{P}_1 x - \mathrm{P}_2(x - a_1) \;\ldots.\; (552).$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Gränzen a_1 und x und beachtet, daß für die untere Gränze oder für $x = a_1$ $\frac{dy}{dx} = \tang\beta_2$ ist; so erhält man

$$\mathrm{EJ}\left(\frac{dy}{dx} - \tang\beta_2\right) = \tfrac{1}{6}\mu(x^3 - a_1^3) - \tfrac{1}{2}\mathrm{P}_1(x^2 - a_1^2) - \tfrac{1}{2}\mathrm{P}_2(x - a_1)^2$$
$$\ldots.\; (553).$$

Nun leuchtet ein, daß wenn die Stützen **B** und **C** symmetrisch gestellt sind, der tiefste Punkt des Balkentheiles **BC** und demnach auch der der neutralen Linie in der Mitte **E** liegen wird, so daß für $x = \frac{a}{2}$ $\frac{dy}{dx} = o$ sein muß. Durch diese Substitution ergibt die vorstehende Gleichung

$$\mathrm{EJ}\tang\beta_2 = -\tfrac{1}{6}\mu\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - a_1^3\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}_1\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a_1^2\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}_2\left[\frac{a}{2} - a_1\right]^2$$
$$\ldots.\; (554).$$

Da ferner die Widerstände bei **D** und **C** denen bei **A** und **B** resp. gleich sind, und die ganze Belastung μa des Balkens von diesen Widerständen getragen wird; so hat man

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \tfrac{1}{2}\mu a \;\ldots.\; (555).$$

Setzt man nun $a_1 = n\frac{a}{2}$ und eliminirt zwischen den Gleichungen (551), (554) und (555) die Größen P_1, P_2 und $\tang\beta_2$; so erhält man für die Werthe derselben

$$P_1 = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)}{8n}\left[\frac{-8+24n-12n^2-n^3}{3-2n}\right] \ldots\ldots (556).$$

$$P_2 = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)}{8n}\left[\frac{8-4n^2+n^3}{3-2n}\right] = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)(2-n)}{8n}\left[\frac{4+2n-n^2}{3-2n}\right] \ldots\ldots (557)$$

$$\tang\beta_2 = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3 n}{24\,EJ}\left[\frac{8-24n+21n^2-5n^3}{3-2n}\right]$$

$$= \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3 n(1-n)}{24\,EJ}\left[\frac{8-16n+5n^2}{3-2n}\right] \ldots\ldots (558).$$

Man bemerkt, daß wenn n klein genug angenommen wird oder wenn die Länge a_1 des Balkentheiles bis zum ersten Unterstützungspunkte im Vergleich zu der halben Länge $\frac{a}{2}$ des ganzen Balkens sehr gering ist, der Widerstand P_1 null werden und sogar einen negativen Werth annehmen kann. In dem letzteren Falle würde sich der Balken an den beiden Enden A und D in die Höhe zu biegen streben, und es müßte, um Dies zu verhindern, an jenen Enden eine Kraft gleich P_1 in vertikaler Richtung von oben nach unten angebracht werden.

Bezeichnet man die Neigung der Tangente der neutralen Linie im Endpunkte A mit β_1, und setzt in Gleichung (549) $x = o$; so erhält man, da für diesen Werth von x $\frac{dy}{dx} = \tang\beta_1$ werden muß,

$$EJ\,(\tang\beta_1 - \tang\beta_2) = -\tfrac{1}{6}\mu a_1^3 + \tfrac{1}{2}P_1 a_1^2.$$

Substituirt man hierin für $\tang\beta_2$ und P_1 ihre Werthe aus den Gleichungen (558) und (556); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion.

$$\tan\beta_1 = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3 n}{48\,\mathrm{EJ}}\left[\frac{-8+24n-18n^2+3n^3}{3-2n}\right] \ldots\ldots (559).$$

Stellt man die stärksten Einbiegungen der Theile AB und BC des Balkens resp. durch D_1 und D_2 dar, und bezeichnet mit x_1 den Abstand von A, in welchem die Einbiegung D_1 stattfindet; so erhält man aus den Gleichungen (549) und (550), da in der ersteren für $x = x_1$ $\frac{dy}{dx} = o$ und in der letzteren für $x = x_1$ $y = D_1$ werden muß,

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{EJ}\tan\beta_2 = \frac{1}{6}\mu\,(x_1{}^3 - a_1{}^3) - \frac{1}{2}P_1\,(x_1{}^2 - a_1{}^2) \\ \mathrm{EJ}\,(D_1 - x_1\tan\beta_2) = \frac{1}{6}\mu(\frac{1}{4}x_1{}^4 - a_1{}^3 x_1) - \frac{1}{2}P_2(\frac{1}{3}x_1{}^3 - a_1{}^2 x_1) \end{array}\right\} \ldots\ldots (560).$$

Der Werth von D_1 wird demnach erhalten, wenn man zwischen diesen beiden Gleichungen x_1 eliminirt und alsdann für P_1 und $\tan\beta_2$ ihre Werthe aus den Gleichungen (556) und (558) substituirt.

Integrirt man die Gleichung (553) zwischen den Gränzen a_1 und $\left(\frac{a}{2}\right)$ und beachtet dabei, daß für die obere Gränze oder für $x = \frac{a}{2}$ $y = D_2$ und für die untere oder für $x = a_1$ $y = o$ ist; so erhält man

$$\mathrm{EJD}_2 = \mathrm{EJ}\left(\frac{a}{2} - a_1\right)\tan\beta_2 + \frac{1}{6}\mu\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^4 - a_1{}^4\right] - a_1{}^3\left[\frac{a}{2} - a_1\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{2}P_1\left\{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - a_1{}^3\right] - a_1{}^2\left[\frac{a}{2} - a_1\right]\right\} - \frac{1}{6}P_2\left(\frac{a}{2} - a_1\right)^3.$$

Substituirt man hierin für $\tan\beta_2$, P_1 und P_2 ihre obigen Werthe; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$D_2 = \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^4 (1-n)^2}{48\,\mathrm{EJ}}\left[\frac{6-8n-2n^2+n^3}{3-2n}\right] \ldots\ldots (561).$$

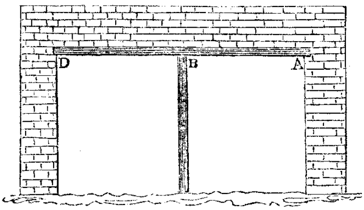
Bezeichnet man die Länge BC mit a_2 und beachtet, daß $\frac{1}{2}a_2 = \mathrm{AE} - \mathrm{BE} = \frac{a}{2} - a_1 = \frac{a}{2} - n\frac{a}{2} = \frac{a}{2}(1-n)$ ist; so kann man für die vorstehende Formel auch setzen

$$D_2 = \frac{\mu\left(\frac{1}{2}a_2\right)^4}{48\,EJ} \cdot \frac{6-8n-2n^2+n^3}{(3-2n)(1-n)^2} \;\ldots\ldots (562).$$

Man sieht, daß wenn n oder a_1 groß genug angenommen werden, diese Formeln für D_2 einen negativen Werth liefern können, sodaß sich alsdann der Balken in der Mitte E in die Höhe biegt.

§. 377. Biegung eines Balkens, welcher über seine Länge gleichförmig belastet und an seinen Enden und in der Mitte fest unterstützt ist.

Wenn in dem Falle des vorhergehenden Paragraphes $a_1 = \frac{a}{2}$ oder $n = 1$ angenommen wird; so fallen die beiden Stützen B und C in eine einzige zusammen, welche den Balken in der



Mitte unterstützt. Der hieraus auf die einzige Stütze resultirende Druck wird demnach durch das Doppelte des entsprechenden Werthes von P_2 aus Gleichung (557) dargestellt, und man hat für diesen Fall

$$\left.\begin{aligned} 2P_2 &= \frac{5}{8}\mu a, \quad P_1 = \frac{3}{16}\mu a \\ \tang\beta_1 &= \frac{\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3}{48\,EJ}, \quad \tang\beta_2 = o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (563).$$

Der Abstand x_1 des Punktes, in welchem die größte Einbiegung des Theiles AB oder DB des Balkens stattfindet, von Einem seiner beiden Endpunkte und der Betrag D_1 dieser größten Einbiegung sind durch die Gleichungen (560) bestimmt. Setzt man darin $\beta_2 = o$ und substituirt für P_1 den vorstehenden Werth, lös't dann die erste für x_1 und die letztere für D_1 auf; so ergibt sich

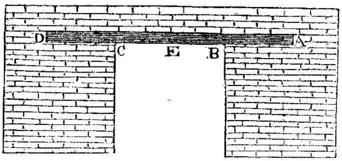
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{16}\left(\frac{a}{2}\right) = 0{,}421535\left(\frac{a}{2}\right) \ldots\ldots (564).$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\mu x_1\left(\frac{a}{2}-x_1\right)^2\left(\frac{a}{2}+2x_1\right)}{48\,\mathrm{EJ}} = \frac{0{,}25997\,\mu\left(\frac{a}{2}\right)^3}{48\,\mathrm{EJ}} \ldots\ldots (565).$$

§. 378. Biegung eines Balkens, welcher über seine Länge gleichförmig belastet und mit seinen Enden fest eingemauert ist, sodaß dieselben keine Biegung erleiden können.

Wenn das Verhältniß n der beiden Theile **AB** und **AE** oder a_1 und $\frac{a}{2}$ eines von zwei mittleren Stützen unterstützten Balkens (s. §. 376) von der Art ist, daß dadurch die Bedingung $8-16n+5n^2=o$ erfüllt wird, oder wenn

$$n = \tfrac{2}{5}(4-\sqrt{6}) = 0{,}6202041 \ldots\ldots (566).$$



ist; so wird der Werth von $\tang \beta_2$ aus Gleichung (558) gleich null. Wenn dieses Verhältniß stattfindet, so wird mithin die neutrale Linie im Punkte **B** der Abszissenaxe parallel sein, oder mit anderen Worten, die Tangente der neutralen Linie bei **B** wird nach der Biegung des Balkens dieselbe Lage behalten, welche sie vorher hatte, d. h. die Lage derselben wird ganz von der Art sein, als wenn der Balken in dem Theile **AB** unbiegsam wäre. Diese Bedingung der Unbiegsamkeit des Theiles **AB** wird aber offenbar dadurch erfüllt, daß der Balken an den Enden **AB** und **DC** fest vermauert wird.

Substituirt man daher den obigen Werth von n in die Gleichung (562), wenn a_2 die Länge **BC** in der vorstehenden Figur bezeichnet; so erhält man für die Einbiegung des Balkens in der Mitte **E**

$$\mathbf{D}_2 = \frac{\mu\left(\frac{1}{2}a_2\right)^4}{24\,\mathrm{EJ}} \ldots\ldots (567).$$

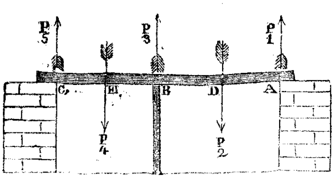
Vergleicht man diesen Werth mit dem der Gleichung (535); so erkennt man, **daß die Einbiegung eines gleichförmig belasteten und mit den verlängerten Enden fest eingemauerten Balkens nur den fünften Theil von der beträgt, welche derselbe erleiden würde, wenn seine Enden nur einfach unterstützt wären.**

Dieses Resultat ist von Hatcher durch folgenden Versuch bestätigt. Ein Stab aus Fichtenholz von $\frac{1}{2}$ Quadratzoll Querschnitt war mit seinen Enden lose auf zwei Rollen gelegt, welche 6 Fuß weit auseinander standen, und es wurde in Folge der Wirkung seines eigenen Gewichtes eine Einbiegung von 1,2 Zoll in der Mitte beobachtet. Nachdem die Enden durch scharfe Kanten unbiegsam gemacht waren, zeigte sich nur eine Einbiegung von 0,22 Zoll. Die Theorie würde 0,24 ergeben haben.

Wenn das Mauerwerk, welches auf einer Längeneinheit des Balkentheiles $AB = a_1$ ruhet, von demselben Gewichte ist, wie das, welches eine jede Längeneinheit des Theiles $BC = a_2$ zu tragen hat; so müßte, wenn a die ganze Länge AD des Balkens bezeichnet, $a_1 = n\left(\frac{a}{2}\right) = 0{,}62\left(\frac{a}{2}\right) = 0{,}31\,a$ sein oder die Länge AB des vermauerten Theiles müßte etwa $\frac{3}{10}$ von der Länge des ganzen Balkens betragen, damit der Theil AB ungekrümmt bleibt und das obige Resultat erreicht wird.

Wenn man den Abstand BC der Stützpunkte B und C mit a' bezeichnete; so würde $\frac{a'}{2} = \frac{a}{2} - a_1 = (1-n)\frac{a}{2}$, also $\frac{a}{2} = \frac{1}{1-n}\,\frac{a'}{2}$ und mithin $a_1 = \frac{n}{1-n}\,\frac{a'}{2} = 0{,}633\left(\frac{a'}{2}\right)$ oder etwa $= \frac{4}{5}\,a'$ sein.

§. 379. Gleichgewichtsbedingungen für einen Stab, welcher von einer beliebigen Anzahl fester Punkte unterstützt und durch gegebene Kräfte gebogen wird.



Um die Untersuchung zu vereinfachen, so nehme man an, es seien nur drei Unterstützungspunkte A, B, C, und die Richtungen der beiden auf den gewichtslosen Stab AC angebrachten Kräfte

P_2 und P_4 halbiren die Abstände zwischen den Unterstützungspunkten; dieselbe Analyse, welche die Gleichgewichtsbedingungen für diesen Fall bestimmt, ist auch auf einen allgemeineren anwendbar. P_1, P_3, P_5 seien die Widerstände der verschiedenen Stützpunkte, a_1 und a_2 die Abstände AB und BC zwischen denselben und x, y die horizontalen und vertikalen Koordinaten irgend eines Punktes der neutralen Linie in Beziehung zu dem Anfangspunkte B. Nach Gleichung (505) hat man

$$\frac{EJ}{R} = \Sigma P p,$$

worin die linke Seite die Summe der Momente der in irgend einem Querschnitte des Stabes ins Leben gerufenen Elastizitätskräfte und die rechte Seite die Summe der Momente aller Kräfte bezeichnet, welche auf den überstehenden Theil des Stabes jenseit jenes Querschnittes wirken. Für $\frac{1}{R}$ ist in der vorstehenden Gleichung nach §. 371 der abgekürzte Werth $\pm \frac{d^2 y}{dx^2}$ zu setzen, jenachdem die neutrale Linie in dem betrachteten Querschnitte der positiven Seite der Abszissenaxe die konvexe oder die konkave Krümmung zukehrt. Außerdem hat man für den Theil BD des Stabes $\Sigma P p = \pm [P_2(\frac{1}{2} a_1 - x) - P_1(a_1 - x)]$, und für den Theil DA $\Sigma P p = \mp P_1 (a_1 - x)$, jenachdem der obige Querschnitt in der konvexen oder der konkaven Krümmung der neutralen Linie liegt. Dies ergibt für die Differenzialgleichung des Theiles der letzteren Linie zwischen B und D

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = P_2 (\tfrac{1}{2} a_1 - x) - P_1 (a_1 - x) \;\ldots\; (568).$$

und für den Theil zwischen D und A

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_1 (a_1 - x) \;\ldots\; (569).$$

Bezeichnet man die Neigung der Tangente der neutralen Linie bei B gegen die Abszissenaxe mit β und integrirt die erste dieser beiden Gleichungen zweimal zwischen den Gränzen o und x, indem man beachtet, daß für $x=o$ $\frac{dy}{dx}=\text{tang}\beta$ und $y=o$ sein muß; so erhält man für den Theil BD

$$\text{EJ}\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}\text{P}_2(a_1x-x^2)-\text{P}_1(a_1x-\tfrac{1}{2}x^2)+\text{EJ}\,\text{tang}\beta\ \ldots (570).$$

$$\text{EJ}y=\tfrac{1}{2}\text{P}_2(\tfrac{1}{2}a_1x^2-\tfrac{1}{3}x^3)-\tfrac{1}{2}\text{P}_1(a_1x^2-\tfrac{1}{3}x^3)+\text{EJ}x\,\text{tang}\beta\ \ldots (571).$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x=\frac{1}{2}a_1$ und bezeichnet mit γ_1 die Neigung der Tangente oder mit $\text{tang}\gamma_1$ den Werth von $\frac{dy}{dx}$ und mit D_1 den Werth von y im Punkte D; so ergibt sich

$$\text{EJ}\,\text{tang}\gamma_1=\tfrac{1}{8}\text{P}_2\,a_1^2-\tfrac{3}{8}\text{P}_1\,a_1^2+\text{EJ}\,\text{tang}\beta,\ \ldots (572).$$

$$\text{EJD}_1=\frac{1}{24}\text{P}_2a_1^3-\frac{5}{48}\text{P}_1a_1^3+\tfrac{1}{2}\text{E}a\text{J}_1\,\text{tang}\beta\ \ldots (573).$$

Integrirt man ferner die Gleichung (569) zwischen den Gränzen $\frac{a_1}{2}$ und x, indem man beachtet, daß für $x=\frac{a_1}{2}$ $\frac{dy}{dx}=\text{tang}\gamma_1$ sein muß; so kommt für den Theil DA

$$\text{EJ}\frac{dy}{dx}=-\text{P}_1(a_1x-\tfrac{1}{2}x^2)+\tfrac{3}{8}\text{P}_1\,a_1^2+\text{EJ}\,\text{tang}\gamma_1.$$

Eliminirt man hieraus $\text{tang}\gamma_1$ vermittelst Gleichung (572); so erhält man

$$\text{EJ}\frac{dy}{dx}=-\text{P}_1(a_1x-\tfrac{1}{2}x^2)+\tfrac{1}{8}\text{P}_2a_1^2+\text{EJ}\,\text{tang}\beta\ \ldots (574).$$

Integrirt man diese Gleichung nochmals zwischen den Gränzen $\frac{a_1}{2}$ und x, indem man beachtet, daß für $x=\frac{a_1}{2}$ $y=\text{D}_1$ sein muß, und eliminirt alsdann D_1 vermittelst Gleichung (573); so ergibt sich ferner für den Theil DA die Gleichung

$$\text{EJ}y=-\tfrac{1}{2}\text{P}_1(a_1x^2-\tfrac{1}{3}x^3)-\tfrac{1}{8}\text{P}_2a_1^2(\tfrac{1}{6}a_1-x)+\text{EJ}x\,\text{tang}\beta\ \ldots (575).$$

Nun leuchtet ein, daß die Gleichung der neutralen Linie für den Theil EC des Stabes in Beziehung der umgekehrten Richtung der Abszissenaxe erhalten wird, wenn man in den obigen auf den Theil DA Bezug habenden Gleichungen P_5 und P_4 resp. an die Stelle von P_1 und P_2, a_2 an die Stelle von a_1 und außerdem $-\tang\beta$ an die Stelle von $\tang\beta$ setzt.

Nimmt man nun zuvörderst in Gleichung (575) $x=a_1$ und beachtet, daß alsdann $y=o$ werden muß, macht darauf in derselben Gleichung die eben bemerkten Substitutionen und setzt darauf $x=a_2$, indem man dabei gleichfalls beachtet, daß alsdann $y=o$ werden muß; so ergeben sich nach der Division mit resp. a_1 und a_2 die beiden Beziehungen

$$o=-\tfrac{1}{3}P_1 a_1^2+\frac{5}{48}P_2 a_1^2+EJ\tang\beta,$$

$$o=-\tfrac{1}{3}P_5 a_2^2+\frac{5}{48}a_2^2-EJ\tang\beta.$$

Ferner hat man für die Bedingungen des Gleichgewichtes der parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (§. 15)

$$P_1 a_1+\tfrac{1}{2}P_4 a_2=P_5 a_2+\tfrac{1}{2}P_2 a_1,$$

$$P_1+P_3+P_5=P_2+P_4.$$

Eliminirt man nun zwischen den ersteren beiden Beziehungen die Größe $\tang\beta$ und verbindet das Endresultat mit den letzteren beiden Beziehungen; so ergeben sich für die Widerstände der drei festen Punkte A, C und B resp., wenn man $a_1+a_2=a$ setzt, die Werthe

$$P_1=\frac{P_2 a_1(8a_2+5a_1)-3P_4 a_2^2}{16\,a\,a_1}, \ldots. (576).$$

$$P_5=\frac{P_4 a_2(8a_1+5a_2)-3P_2 a_1^2}{16\,a\,a_2}, \ldots. (577).$$

$$P_3=\tfrac{1}{2}\left[P_2\left(1+\frac{3a_1}{8a_2}\right)+P_4\left(1+\frac{3a_2}{8a_1}\right)\right] \ldots. (578).$$

In Verbindung mit den Gleichungen (573) und (572) ergeben die letzteren Beziehungen ferner

$$D_1=\frac{a_1^2}{768EJa}\left[P_2 a_1(16a_2+7a_1)-9P_4 a_2^2\right], \ldots. (579).$$

und hieraus durch Verwandelung von P_2, P_4, a_1, a_2 resp. in P_4, P_2, a_2, a_1

$$D_2 = \frac{a_2^2}{768\,EJa}\left[P_4 a_2 (16\,a_1 + 7\,a_2) - 9 P_2 a_1^2\right], \ldots . (580).$$

$$\tang\beta = \frac{a_1 a_2}{16\,EJ\,a}\left[P_2 a_1 - P_4 a_2\right], \ldots . (581).$$

$$\tang\gamma_1 = \frac{a_1}{128\,EJa}\left[P_2 a_1^2 + P_4 a_2^2\right] \ldots . (582).$$

Wenn in Gleichung (574) $x = a_1$ gesetzt wird und alsdann für P_1 und $\tang\beta$ ihre Werthe aus den Gleichungen (576) und (581) substituirt werden; so erhält man für die Tangente des Neigungswinkels β_1 im Punkte A gegen die Abszissenaxe nach gehöriger Reduktion

$$\tang\beta_1 = \frac{a_1}{32\,EJa}\left[P_4 a_2^2 - P_2 a_1 (2a_2 + a_1)\right] \ldots . (583).$$

und hieraus durch Verwandelung von P_2, P_4, a_1, a_2 resp. in P_4, P_2, a_2, a_1 für die Tangente des Neigungswinkels β_2 im Punkte C gegen die Abszissenaxe

$$\tang\beta_2 = \frac{a_2}{32\,EJa}\left[P_2 a_1^2 - P_4 a_2 (2\,a_1 + a_2)\right] \ldots . (584).$$

Endlich erhält man durch eine ähnliche Verwandelung der betreffenden Größen aus Gleichung (582) für die Tangente des Neigungswinkels γ_2 im Punkte E

$$\tang\gamma_2 = \frac{a_2}{128\,EJa}\left[P_4 a_2^2 + P_2 a_1^2\right] \ldots . (584^a).$$

Aus den Gleichungen (582) und (584^a) folgt, daß zwischen den Tangenten der Neigungswinkel γ und γ_1 immer das Verhältniß $\tang\gamma_1 : \tang\gamma_2 = a_1 : a_2$ stattfindet.

§. 380. Wenn die Kräfte P_2 und P_4 und auch die Abstände a_1 und a_2 einander gleich sind; so hat man

$$P_1 = P_5 = \frac{5}{16} P_2,\ P_3 = \frac{11}{8} P_2,$$

$$D_1 = D_2 = \frac{7 P_2 a_1^3}{768 EJ},$$

$$\tang\beta = o, \tang\beta_1 = \tang\beta_2 = -\frac{P_2 a_1^2}{32 EJ}, \tang\gamma_1 = \tang\gamma_2 = \frac{P_2 a_1^2}{128 EJ}$$

§. 381. Wenn die Abstände a_1 und a_2 einander gleich sind und wenn $P_4 = 3 P_2$ ist; so hat man

$$P_1 = \tfrac{1}{8} P_2,\ P_3 = \frac{11}{4} P_2, P_5 = \tfrac{9}{8} P_2,$$

$$D_1 = -\frac{P_2 a_1^3}{384 EJ}, D_2 = \frac{5 P_2 a_1^3}{128 EJ},$$

$$\tang\beta = -\frac{P_2 a_1^2}{16 EJ}, \tang\beta_1 = o, \tang\beta_2 = -\frac{P_2 a_1^2}{8 EJ},$$

$$\tang\gamma_1 = \tang\gamma_2 = \frac{P_2 a_1^2}{64 EJ}.$$

Das Resultat $\tang\beta_1 = o$ für die vorstehenden Verhältnisse ist von Hatcher durch mehrere Versuche mit Stäben von Schmiedeeisen bestätigt worden.

§. 382. Wenn $a_1 = a_2$ und $3 P_4 = 13 P_2$; so wird

$$P_1 = o, P_3 = \frac{11}{3} P_2, P_5 = \tfrac{5}{3} P_2,$$

$$D_1 = -\frac{P_2 a_1^3}{96 EJ}, D_2 = \frac{17 P_2 a_1^3}{288 EJ},$$

$$\tang\beta = -\frac{5 P_2 a_1^2}{48 EJ}, \tang\beta_1 = \frac{P_2 a_1^2}{48 EJ}, \tang\beta_2 = -\frac{3 P_2 a_1^2}{16 EJ},$$

$$\tang\gamma_1 = \tang\gamma_2 = \frac{P_2 a_1^2}{48 EJ}.$$

§. 383. Krümmung eines rechtwinkligen Stabes, wenn die Richtung der biegenden Kraft und die Größe der Einbiegung beliebige Werthe haben.

Nach §. 360 ist das Trägheitsmoment J des Querschnittes des Stabes in Beziehung zu einer auf der Biegungsebene perpendikular stehenden und durch die neutrale Linie gehenden Axe zu nehmen. Der Abstand h dieser neutralen Linie von dem Schwerpunkte des Querschnittes ist durch die Gleichung (504) bestimmt. Da nun (§. 362) $\frac{1}{12}bc^3$ das Trägheitsmoment des rechtwinkligen Querschnittes von der Breite b und Höhe c in in Beziehung zu einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe bezeichnet; so folgt aus §. 79, daß das Trägheitsmoment J in Beziehung zu einer anderen Axe, welche jener parallel ist und um h von derselben absteht, durch

$$J = h^2 bc + \tfrac{1}{12} bc^3$$

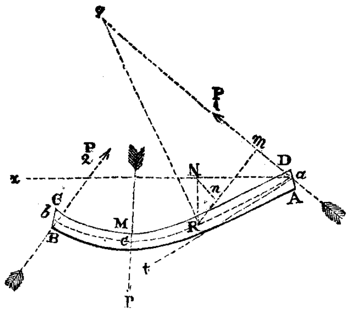
dargestellt wird. Substituirt man hierin für h seinen Werth aus Gleichung (504), indem man beachtet, daß hier $K = bc$ ist; so erhält man

$$J = \frac{R^2 P_1^{\,2}}{E^2 \, bc} \sin^2 \vartheta + \tfrac{1}{12} bc^3 \;\ldots\ldots\; (585).$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung (505); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion als Ausdruck des Prinzipes der Gleichheit der Momente

$$\frac{EJ}{R} = \frac{12 R^2 P_1^{\,2} \sin^2 \vartheta + E^2 b^2 c^4}{12 E R \, bc} = P_1 p_1, \;\ldots\ldots\; (586).$$

worin p_1 den Abstand der Richtung der Kraft P_1 von irgend einem Punkte der neutralen Linie, für welchen der Krümmungshalbmesser gleich R ist, und ϑ die Neigung jener Richtung gegen die Normale oder gegen den Krümmungshalbmesser R selbst bezeichnet. Zieht man nun ax parallel zu der ursprünglichen Lage des Stabes vor der Biegung, nimmt diese Linie zu der Abszissenaxe und den Punkt a zum Anfangspunkte der Koordinaten; so ist



$p_1 = Rm = Rn + nm = \overline{NR} \cdot \cos NRm + \overline{aN} \cdot \sin Nam = y \cos Nam + x \sin Nam.$

Bezeichnet man die Neigung DaP_1 der Richtung von P_1 gegen die Normale im Punkte a mit ϑ_1 und die Neigung Nat der Tangente der neutralen Linie im Punkte a gegen die Abszissenaxe ax mit β_1; so ist $Nam = \frac{\pi}{2} - (\vartheta_1 + \beta_1)$ und demnach

$$p_1 = y \sin(\vartheta_1 + \beta_1) + x \cos(\vartheta_1 + \beta_1).$$

Substituirt man diesen Werth von p_1 in die obige Gleichung; so wird dieselbe

$$\frac{12R^2P_1^2\sin^2\vartheta + E^2b^2c^4}{12ERbc} = P_1\left[y \sin(\vartheta_1 + \beta_1) + x \cos(\vartheta_1 + \beta_1)\right] \quad \ldots\ldots (587).$$

In der vorstehenden Formel ist

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}},$$

da die neutrale Linie der positiven Seite der Abszissenaxe die konkave Krümmung zukehrt. ϑ ist die Neigung Rqa der Normalen in R gegen die Richtung von P_1. Bezeichnet man demnach die Neigung der Tangente in R gegen die Abszissenaxe mit β; so findet man leicht, daß $\vartheta = \vartheta_1 + \beta_1 - \beta$ ist. Für β hat man aber die Gleichung $\tang \beta = \frac{dy}{dx}$, und $\tang \beta_1$ ist der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = o$, also eine konstante Größe, welche für die verschiedenen Punkte der Kurve ac nicht variirt. Bezeichnet man die Neigung NaP_1 der Kraft P_1 gegen die Abszissenaxe mit α, so ist endlich $\alpha = \frac{\pi}{2} - (\vartheta_1 + \beta_1)$ oder $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta_1)$, und man sieht, daß die vorstehende Gleichung eine Differenzialfunktion der zweiten Ordnung zwischen den Koordinaten x und y der neutralen Linie ist. Dieselbe gilt für den Theil der neutralen Linie von a bis c; für den anderen Theil von c bis b erhält man leicht eine ähnliche Gleichung. Verbindet man diese beiden mit den Bedingungen, welche sich sowol hinsichtlich der Richtungen, wie der Beträge der drei Kräfte P_1, P_2 und P, aus der Betrachtung des Gleichgewichtes derselben ergeben; so erhält man die Werthe aller der Größen, durch welche die Biegung des Stabes bestimmt ist. Die aus der Gleichung für die neutrale Linie abgeleiteten Werthe von R und ϑ, in die Gleichung (504) gesetzt, ergeben endlich die Lage jener Linie in der Biegungsebene und mithin die der neutralen Fläche im Stabe.

§. 384. Fall, wo die Biegung des Stabes gering ist.

Wenn sich der Stab unter der Wirkung der darauf angebrachten Kräfte nur wenig biegt, und die Neigung ϑ_1 der Richtung P_1 gegen die Normale in ihrem Angriffspunkte den Werth von $\frac{\pi}{4}$ nicht übersteigt; so ist $y \sin(\vartheta_1 + \beta_1)$ sehr klein, und kann gegen $x \cos(\vartheta_1 + \beta_1)$ vernachlässigt werden. In diesem Falle ist ferner für alle Lagen des Punktes R ϑ sehr nahe gleich ϑ_1 und β_1 ungemein klein. Unter diesen Umständen reduzirt sich demnach die Gleichung (587) auf

$$\frac{12 R^2 P_1{}^2 \sin^2 \vartheta_1 + E^2 b^2 c^4}{12 E R b c} = P_1 x \cos \vartheta_1 \;\ldots\ldots\; (588).$$

Löst man diese Gleichung für $\frac{1}{R}$ auf; so ergibt sich

$$\frac{1}{R} = \frac{6 P_1}{E b c^3}\left[x \cos \vartheta_1 + \sqrt{x^2 \cos^2 \vartheta_1 - \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \vartheta_1}\right] \ldots\ldots (589).$$

worin die Wurzelgröße offenbar positiv zu nehmen ist: denn wäre sie negativ; so würde sie für $\vartheta_1 = o$ in allen Punkten der Kurve $\frac{1}{R} = o$, also $R = \infty$ ergeben, was offenbar nicht möglich ist.

§. 385. Betrag der Arbeit, welche auf die Biegung eines rechtwinkligen Stabes verwendet werden muß, wenn die biegenden Kräfte unter irgend einem Winkel gegen die Oberfläche des Stabes geneigt sind, welcher größer ist, als ein halber rechter.

Wenn u_1 die Arbeit darstellt, welche auf die Biegung des Theiles $AM = a_1$ des Stabes verwendet werden muß; so hat man nach Gleichung (510)

$$u_1 = \frac{P_1^2}{2E} \int_0^{a_1} \frac{p_1^2}{J} dx.$$

Nach Gleichung (505) ist aber $\frac{P_1^2}{J} = \frac{E}{p_1} \frac{P_1}{R}$; mithin

$$u_1 = \tfrac{1}{2} P_1 \int_0^{a_1} \frac{p_1}{R} dx. \quad \ldots. (590).$$

Ferner hat man nach Gleichung (589) und da p_1 sehr nahe $= x \cos \vartheta_1$ ist,

$$\frac{p_1}{R} = \frac{6P_1}{Ebc^3} \left[x \cos \vartheta_1 + \sqrt{x^2 \cos^2 \vartheta_1 - \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \vartheta_1} \right] x \cos \vartheta_1.$$

Da der Werth von $\frac{1}{R}$ aus Gleichung (589) in alle den Punkten imaginär wird, wo $x \cos \vartheta < \frac{1}{\sqrt{3}} c \sin \vartheta_1$ ist; so beginnt die Krümmung der neutralen Linie unter den gemachten Voraussetzungen erst in demjenigen Punkte, für welchen $x \cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} c \sin \vartheta_1$ ist. Bezeichnet man daher den entsprechenden Werth $\frac{1}{\sqrt{3}} c \operatorname{tang} \vartheta_1$ von x mit x_1; so leuchtet ein, daß das Integral der Gleichung (590) nur zwischen den Gränzen x_1 und a_1, anstatt zwischen o und a_1, genommen werden darf. Demnach hat man

$$u_1 = \frac{3P_1^2 \cos \vartheta_1}{Ebc^3} \int_{x_1}^{a_1} \left(x^2 \cos \vartheta_1 + x \sqrt{x^2 \cos^2 \vartheta_1 - \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \vartheta_1} \right) dx,$$

oder, wenn man die Integration ausführt,

$$u_1 = \frac{P_1{}^2 \cos^2\vartheta_1}{Ebc^3}\left[a_1{}^3 - \frac{1}{3\sqrt{3}} c^3 \tang^3\vartheta_1 + \left(a_1{}^2 - \tfrac{1}{3}c^2 \tang^2\vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad \ldots . (591).$$

Ein ähnlicher Ausdruck ergibt sich für die Arbeit, welche auf die Biegung des Theiles $BM = a_2$ des Stabes verwendet werden muß. Vernachlässigt man nun das in c^3 multiplizirte Glied, als sehr klein gegen $a_1{}^3$ und $a_2{}^3$; so ist die Gesammtarbeit, welche die Biegung des ganzen Stabes erfordert, durch die Gleichung

$$U = \frac{1}{Ebc^3}\Big\{P_1{}^2 \cos^2\vartheta_1 \left[a_1{}^3 + \left(a_1{}^2 - \tfrac{1}{3}c^2 \tang^2\vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$+ P_2{}^2 \cos^2\vartheta_2 \left[a_2{}^3 + \left(a_2{}^2 - \tfrac{1}{3}c^2 \tang^2\vartheta_2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big\}$$

dargestellt. Wenn man jetzt mit ϑ die Neigung der mittleren Kraft P gegen die Normale auf der Oberfläche des Stabes bezeichnet, sowie ϑ_1 und ϑ_2 die ähnlichen Größen für die Kräfte P_1 und P_2 bezeichnen, und die Länge des ganzen Stabes $a_1 + a_2 = a$ setzt; so hat man unter der Voraussetzung, daß die Biegung gering sei,

$$P_1 a \cos\vartheta_1 = P a_2 \cos\vartheta \text{ und } P_2 a \cos\vartheta_2 = P a_1 \cos\vartheta.$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und der vorhergehenden die Größen P_1 und P_2; so kommt

$$U = \frac{P^2 \cos^2\vartheta}{E a^2 bc^3}\Big\{a_2{}^2 \left[a_1{}^3 + \left(a_1{}^2 - \tfrac{1}{3}c^2 \operatorname{taug}^2\vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$+ a_1{}^2 \left[a_2{}^3 + \left(a_2{}^2 - \tfrac{1}{3}c^2 \tang^2\vartheta_2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big\} \quad \ldots . (592).$$

Wenn die Kraft P_1 perpendikular in der Mitte des Stabes angebracht ist und die beiden Kräfte P_1 und P_2 an den Enden unter gleichen Neigungswinkeln gegen die Oberfläche des Stabes wirken; so hat man $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$, $\vartheta_1 = \vartheta_2$ und $\vartheta = o$. Hierdurch reduzirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{P}^2 \left[a^3 + \left(a^2 - \tfrac{4}{3} c^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}} \right]}{16 \mathrm{E} b c^3} \dots \text{(593).}$$

§. 386. Die lineäre Einbiegung eines rechtwinkligen Stabes.

Wenn D_1, wie in §. 370, die Einbiegung des Endpunktes A in perpendikularer Richtung zu der Oberfläche des Stabes bezeichnet; so hat man nach §. 52 für die Arbeit u_1, welche die Kraft P_1 in der Richtung der Linie D_1 entwickelt,

$$u_1 = \int \mathrm{P}_1 \cos \vartheta_1 . d\mathrm{D}_1 .$$

Hieraus folgt durch Differenziation

$$\mathrm{P}_1 \cos \vartheta_1 = \frac{d u_1}{d\mathrm{D}_1} = \frac{d u_1}{d\mathrm{P}_1} \cdot \frac{d \mathrm{P}_1}{d \mathrm{D}_1},$$

wobei man u_1 als eine Funktion von P_1 und P_1, als eine Funktion von D_1 betrachtet.

Nach Gleichung (591) ist aber (wenn man das in c^3 multiplizirte Glied gegen a_1^3 vernachlässigt)

$$\frac{d u_1}{d\mathrm{P}_1} = \frac{2\mathrm{P}_1}{\mathrm{E} b c^3} \cos^2 \vartheta_1 \left[a_1^3 + \left(a_1^2 - \tfrac{1}{3} c^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}} \right];$$

demnach

$$\mathrm{P}_1 \cos \vartheta_1 = \frac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{D}_1} \cdot \frac{2\mathrm{P}_1}{\mathrm{E} b c^3} \cos^2 \vartheta_1 \left[a_1^3 + \left(a_1^2 - \tfrac{1}{3} c^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $\mathrm{P}_1 \cos \vartheta_1$, multiplizirt mit $d\mathrm{D}_1$ nnd integrirt die Gleichung; so ergibt sich

$$\mathrm{D}_1 = \frac{2\mathrm{P}_1}{\mathrm{E} b c^3} \cos \vartheta_1 \left[a_1^2 + \left(a_1^2 - \tfrac{1}{3} c^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}} \right] \dots \text{(594).}$$

Verfährt man ebenso mit der Einbiegung D im Angriffspunkte der mittleren Kraft P; so erhält man aus Gleichung (592)

$$D = \frac{2P\cos\vartheta}{E\,a^2\,bc^3}\left\{a_2^2\left[a_1^2 + \left(a_1^2 - \tfrac{1}{3}c^2\tan^2\vartheta_1\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right.$$

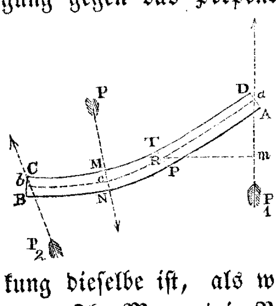
$$\left. + a_1^2\left[a_2^2 + \left(a_2^2 - \tfrac{1}{3}c^2\tan^2\vartheta_2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} \quad \ldots . (595).$$

In dem Falle, wo P_1 und P_2 unter demselben Winkel ϑ_1 gegen die Normale auf der Oberfläche des Stabes wirken, und die Richtung von P_3 mit der Normalen zusammenfällt, indem sie durch die Mitte des Stabes geht, wird die vorstehende Gleichung

$$D = \frac{P\left[a^3 + (a^2 - \tfrac{4}{3}c^2\tan^2\vartheta_1)^{\frac{3}{2}}\right]}{8E\,bc^3} \quad \ldots . (596).$$

§. 387. **Betrag der Arbeit, welche zur Biegung eines Stabes erforderlich ist, wenn auf denselben an seinen beiden Enden und in einem einzigen zwischenliegenden Punkte Kräfte angebracht sind, und derselbe außerdem noch der Wirkung eines Systemes von parallelen, über seine Länge gleichförmig vertheilten Kräften ausgesetzt ist.**

μ sei der Gesammtwerth der über eine jede Längeneinheit des Stabes vertheilten Kräfte und α ihre gemeinschaftliche Neigung gegen das Perpendikel auf seiner Oberfläche, ϑ_1 die Neigung der Kraft P_1 gegen dasselbe Perpendikel, $ac = a_1$ und $ab = a$. Ist nun **PT** ein beliebiger Querschnitt in dem Theile **DM** des Stabes und $aR = x$; so wird μx den ganzen Betrag der über die Fläche **DT** gleichförmig vertheilten parallelen Kräfte darstellen, deren Wirkung dieselbe ist, als wenn sie in der Mitte **DT** vereinigt wären. Ihr Moment in Beziehung zu der in **R** auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Axe ist demnach $\mu x \cdot \frac{1}{2} x \cos\alpha = \frac{1}{2}\mu x^2 \cos\alpha$, und da das Moment der Kraft P_1 in Beziehung zu derselben Axe $P_1 x \cos\vartheta_1$ ist; so hat man für die Summe der



Momente aller auf den Theil DT angebrachter Kräfte den Ausdruck $(P_1 x \cos\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu x^2 \cos\alpha)$, indem die Kraft P_1 offenbar die Biegung herbeiführt und die Belastung μx jener Kraft direkt entgegenwirkt. Setzt man nun diesen Werth an die Stelle von $P_1 p_1$ in Gleichung (510); so ergibt sich

$$u_1 = \frac{1}{2E_0}\int_0^{a_1} \frac{(P_1 x \cos\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu x^2 \cos\alpha)^2}{J}\, dx.$$

§. 388. Wenn sämmtliche Kräfte auf der Oberfläche des Stabes perpendikular stehen; so hat man $\vartheta_1 = o$, $\alpha = o$ und J konstant, weil alsdann nach Gleichung (504) $h = o$ wird und demnach J das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung zu einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe darstellt. Hierdurch ergibt die vorstehende Gleichung nach gehöriger Integration und Reduktion

$$u_1 = \frac{a_1^{\,3}}{2EJ}\left(\tfrac{1}{3}P_1^{\,2} - \tfrac{1}{4}P_1 \mu a_1 + \frac{1}{20}\mu^2 a_1^{\,2}\right) \;\ldots\; (597).$$

Wenn die Kraft P in der Mitte des Stabes angebracht ist; so hat man $P_1 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\mu a$ und $a_1 = \frac{1}{2}a$, ferner ist die gesammte zur Biegung des Stabes erforderliche Arbeit U gleich $2u_1$, und man erhält demnach aus der vorstehenden Gleichung

$$U = \frac{a^3}{48EJ}(\tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{5}{8}P\mu a + \tfrac{1}{5}\mu^2 a^2) \;\ldots\; (598).$$

Dies ist der Ausdruck für die Arbeit, welche nicht allein von der in der Mitte des Stabes angebrachten Kraft, sondern auch von dem Systeme der gleichförmig über seine ganze Länge vertheilten parallelen Kräfte behuf der Biegung entwickelt ist. Derselbe ist eine Funktion der Kräfte P und μ, welche nach beendigter Biegung im Stande sind, den Stab gebogen zu erhalten. Hinsichtlich der Werthe für die lineare Einbiegung D und für die Gestalt der neutralen Linie siehe die Schlußgleichungen zu §. 374.

Wäre die einzelne in der Mitte des Stabes angebrachte

Kraft gleich null und die Biegung durch die Wirkung der parallelen Kräfte allein hervorgebracht; so würde

$$U = \frac{(\mu a)^2 . a^3}{240 EJ}$$

die von denselben verwendete Arbeit sein. Nachdem die Biegung durch ein einziges System solcher parallelen Kräfte vollendet ist, wird die neutrale Linie, welche durch die Schwerpunkte der Querschnitte des Stabes geht, durch Gleichung (534) dargestellt sein. Um den Abstand G des Schwerpunktes der neutralen Linie unter der in §. 374 angenommenen Abszissenaxe zu bestimmen; so hat man nach §. 32 $G = \frac{\int y\,ds}{s}$ worin s die Länge der Kurve bezeichnet. Setzt man dieselbe gleich der Länge a des Stabes vor der Biegung und schreibt, da die Biegung als sehr gering vorausgesetzt wird, dx für ds; so wird $G = \frac{\int_0^a y\,dx}{a}$. Substituirt man nun hierin für y seinen Werth in x aus Gleichung (534) und führt die Integration aus; so kommt

$$G = \frac{\mu a^4}{120 EJ} = \frac{16}{25} D$$

(s. Gleichung 535). Wäre nun auf den Stab sogleich in seiner ursprünglichen horizontalen Lage ein System von gleichförmig über seine Länge vertheilten Gewichten, deren Gesammtwerth μa ist, angebracht gewesen, so würde sich deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt in dem Augenblicke, wo der Stab diejenige Biegung annimmt, in welcher ihn jene Gewichte zu erhalten vermögen, um G gesenkt haben, und die von jenen Gewichten bis zu demselben Augenblicke entwickelte Arbeit würde demnach

$$\mu a . G = \frac{(\mu a)^2 a^3}{120 EJ}$$

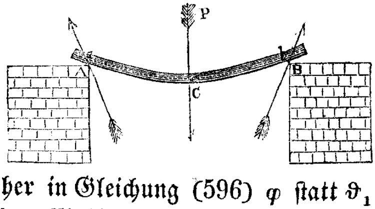
sein. Diese Arbeit ist aber gerade noch einmal so groß, als die vorhin durch U dargestellte, welche eben hinreichend ist, um den Stab in dieselbe gebogene Lage zu bringen. Man sieht also durch ein ähnliches Raisonnement, wie das in §. 350 geführte, daß ein so belasteter Stab, wenn man ihn sogleich der vollen Wirkung der darauf angebrachten Kräfte aussetzte, in Schwingungen gerathen würde, bei welchen sein Mittelpunkt fortwährend um eine Lage oszillirte, deren Abstand unter der anfänglichen horizontalen Lage des Stabes durch den Werth von **D** aus Gleichung (535) dargestellt ist.

Etwas Ähnliches würde natürlich auch stattfinden, wenn auf den Stab nur die Kraft **P**, und zwar gleich vom ersten Augenblicke der Biegung an, mit ihrer vollen Kraft angebracht gewesen wäre. Die Mitte des Stabes würde alsdann um die durch Gleichung (516) bestimmte Lage oszilliren.

Wäre sowol die Kraft P_1, wie das gleichförmig vertheilte Gewicht μa vom ersten Beginn der Biegung an auf den Stab wirksam gewesen; so würde der Mittelpunkt der entstehenden Oszillationen durch den Werth von **D** aus den Schlußgleichungen des §s. 374 bestimmt sein.

§. 389. **Biegung eines in der Mitte belasteten Stabes, welcher mit seinen Enden auf zwei feste Flächen gelegt ist, wenn dabei auf die Reibung Rücksicht genommen wird, welche zwischen dem Stabe und den festen Flächen stattfindet.**

Es leuchtet ein, daß in jedem Augenblicke der allmählig fortschreitenden Einbiegung des Stabes die Widerstände der festen



Flächen bei **A** und **B** gegen die Normale auf der Oberfläche des Stäbes unter dem Reibungswinkel φ geneigt sein werden. Substituirt man daher in Gleichung (596) φ statt ϑ_1; so erhält man für die Größe der Einbiegung, welche einem gegebenen Drucke **P** in der Mitte des Stabes entspricht,

$$D = \frac{P\left[a^3 + \left(a^2 - \tfrac{4}{3}c^2 \operatorname{tang}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}\right]}{8Ebc^3} \quad \ldots\ldots (599).$$

Man begreift, daß die Richtung der Widerstände der festen Flächen A und B gegen die Normale auf der Oberfläche des Stabes auch dann noch fortwährend unter dem Reibungswinkel φ geneigt sein werden, wenn der Stab die größte Biegung angenommen hat, welche einer Kraft $= P$ entspricht, und mithin in vollkommener Ruhe beharret. Denn gesetzt, in dem Augenblicke, wo der Stab in jene Lage und zur Ruhe gekommen ist, näherte sich die Richtung der Widerstände bei A und B der Normalen auf der Oberfläche des Stabes, wozu dieselbe nach dem Principe des kleinsten Widerstandes ein Bestreben hat (§. 334); so würde man für φ in der vorstehenden Gleichung einen kleineren Winkel zu substituiren haben. Da hierdurch der Werth von D wächst; so folgt, daß gleichzeitig mit jener Änderung der Richtung der Widerstände bei A und B die Mitte des Stabes weiter heruntersinken würde. Nun kann aber ein solches Sinken nicht ohne ein Gleiten des Stabes auf den festen Flächen A und B erfolgen, und dieses Gleiten wiederum nicht, bevor nicht die Richtung der Widerstände jener Flächen in den betreffenden Schenkel des Reibungswinkels zurückgekehrt ist. Hieraus sieht man, daß das Bestreben der Kraft P, den Stab tiefer zu biegen, die Richtung der Widerstände bei A und B fortwährend unter dem Neigungswinkel φ gegen die Normale auf der Oberfläche des Stabes erhält.

Etwas Anderes wäre es übrigens, wenn man die Kraft P, nachdem der Stab die durch Gleichung (599) bestimmte Lage erreicht hat, durch einen allmähligen Druck so lange vermehrte, bis die Einbiegung den Werth $D = \frac{P a^3}{48 E J} = \frac{P a^3}{4 E b c^3}$ aus Gleichung (516) erreicht hätte, welcher durch die Kraft P allein hervorgebracht sein würde, wenn sich bei A und B keine Reibung äußerte oder wenn $\varphi = o$ wäre. Wenn man alsdann den neuen Druck allmählig wieder entfernte; so würde die Richtung der Widerstände bei A und C, dem Prinzipe des kleinsten Widerstandes gemäß sich der parallelen Richtung zu P oder der normalen Richtung auf der Oberfläche des Stabes ungehindert nähern können, weil das dadurch erregte Bestreben des Stabes, tiefer herabzusinken, durch die allmähliche Hinwegnahme jenes Druckes wieder vernichtet würde. Nachdem auf diese Weise der zuletztgedachte Druck gänzlich wieder entfernt wäre, würde der Stab ruhig bei der Einbiegung $D = \frac{P a^3}{4 E b c^3}$ verharren, ohne in die frühere Lage zurückzukehren, indem alsdann die festen Flächen **A** und **B** in parallelen Richtungen zu **P** oder sehr nahe in normalen Richtungen zu der Oberfläche des Stabes Widerstand leisteten.

Form der Körper von der größten Festigkeit mit einer gegebenen Menge von Material.

§. 390. Die Form, in welcher ein aus einer gegebenen Menge von Material gebildeter Körper unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft die größte Festigkeit besitzt, ist diejenige, welche ihn in einem jeden Punkte zum Bruche gleich stark geneigt macht, sodaß, wenn derselbe durch die Vermehrung der Kraft bis zu ihrer äußersten Gränze in irgend Einem Punkte in den Gränzzustand der Haltbarkeit gebracht würde, er sich auch in einem jeden anderen Punkte in diesem Zustande befände. Denn nimmt man an, der Körper sei in irgend einer anderen Form hergestellt, sodaß er im Begriffe wäre, in Einem Punkte zu brechen, in einem anderen aber nicht; so könnte offenbar ein Theil des Materiales von dem letzteren Punkte hinweggenommen werden, ohne den Körper daselbst in den Gränzzustand der Haltbarkeit zu versetzen, und dem ersteren Punkte hinzugefügt werden, sodaß der Körper daselbst aus dem Gränzzustande der Haltbarkeit gebracht würde. Der so veränderte Körper würde sich dann in keinem Punkte mehr in dem Gränzzustande der Haltbarkeit befinden, und fähig sein, die Wirkung einer größeren Kraft zu ertragen; er würde mithin mehr Stärke besitzen, als vorhin. Hieraus folgt, das die erstere Form nicht die größte Stärke darbot, welche dem Körper mit derselben Menge von Material gegeben werden konnte, und daß überhaupt keine andere Form die größte Stärke erzeugen kann, welche nicht die Bedingung der gleichen Geneigtheit zum Bruche in jedem Punkte erfüllt.

Die Form, welche einem Körper bei einer gegebenen Menge von Material die größte Stärke verschafft, sodaß derselbe unter der Wirkung einer gegebenen Kruft einen bestimmten Grad von Haltbarkeit besitzt, ist offenbar auch diejenige, welche sich bei einer gegebenen Stärke mit der geringsten Menge von Material ausführen läßt, sodaß die Form von der größten Stärke auch immer die von der größten Materialersparung ist.

Bruch.

§. 391. Der Bruch eines stabförmigen Körpers kann entweder durch einen in der Richtung seiner Länge angebrachten Zug in Folge der Ausdehnung seiner Theile erfolgen — alsdann setzt sich der Wirkung dieser Kraft die absolute Festigkeit oder Zähigkeit des Körpers entgegen — oder durch einen in der Richtung seiner Länge angebrachten Druck in Folge der Zusammendrückung seiner Theile — alsdann leistet die rückwirkende Festigkeit des Körpers Widerstand — oder endlich durch eine seitwärts gegen seine Länge gerichtete Kraft in Folge der Biegung des Körpers, wodurch die Eine Seite desselben ausgedehnt und die andere zusammengedrückt wird — alsdann widersteht der Körper vermöge seiner relativen Festigkeit.

Absolute Festigkeit.

§. 392. Die absolute Festigkeit verschiedener Materialien, wie sie von den vorzüglichsten Autoritäten durch die mittleren Resultate zahlreicher Versuche bestimmt sind, finden sich in einer diesem Werke angehängten Tabelle verzeichnet. Das Maaß oder die Einheit der absoluten Festigkeit ist derjenige Widerstand, in Pfunden ausgedrückt, welchen ein prismatischer Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt dem Zerreißen entgegensetzt. Es leuchtet ein, daß eine Vereinigung von n solchen Stäben, welche seitwärts aneinander gereihet sind, oder ein einziger Stab von n Quadratzoll Querschnitt eine $n$mal so große absolute Festigkeit besitzt, als ein jeder einzelne Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt.

Das Maaß der absoluten Festigkeit wird in den folgenden Paragraphen immer durch den Buchstaben λ bezeichnet werden. Um demnach die absolute Festigkeit eines Stabes von gegebenem Querschnitte zu finden, hat man die Anzahl der Quadratzolle dieses Querschnittes mit dem Werthe von λ zu multiplizieren, welcher dem Materiale des Stabes entspricht.

§. 393. Ein Stab, ein Seil oder eine Kette ist vertikal aufgehängt und in dem untersten Punkte mit einem Gewichte belastet; es sollen die Bedingungen für den Bruch angegeben werden.

Erstens. Wenn der Stab einen gleichförmigen Querschnitt hat; so sei

K die Fläche dieses Querschnittes,
L die Länge des Stabes,
μ das Gewicht einer jeden Kubikeinheit desselben,
W das an seinem unteren Ende aufgehängte Gewicht,
λ das Maaß der absuluten Festigkeit der Substanz des Stabes*).

Endlich sei der Stab fähig, einen Widerstand zu leisten, welcher m mal so groß ist, als der, welchen er unter der Wirkung der Belastung **W** und seines eigenen Gewichtes zu leisten braucht.

Das Gewicht des Stabes ist hiernach μLK und die Stärke des Zuges in seinem obersten Querschnitte μLK+W. Dieser Zug ist offenbar größer, als der, welcher sich in jedem anderen Querschnitte äußert, und der Bruch wird demnach im obersten Querschritte erfolgen. Da nun der Widerstand, welchen der Stab dem Bruche entgegensetzt, oder seine absolute Festigkeit, gleich λK ist, und derselbe fähig sein soll, einen m mal so großen Widerstand zu leisten; so hat man

$$\lambda \mathrm{K} = m(\mu \mathrm{LK} + \mathrm{W}),$$

und demnach

$$\mathrm{K} = \frac{m\mathrm{W}}{\lambda - m\mu\mathrm{L}} \quad \ldots \quad (600).$$

Durch diese Gleichung ist der gleichförmige Querschnitt **K** eines Stabes, eines Seiles oder einer Kette bestimmt, welcher

*) Wenn sämmtliche Raumgrößen nach Zollen gemessen werden, so bezeichnet λ den aus der Tabelle am Ende dieses Werkes zu entnehmenden Werth. Will man jedoch den Fuß zur Längeneinheit aller in den nachstehenden Formeln vorkommenden Raumgrößen annehmen; so hat man überall 144 λ an die Stelle von λ zu setzen.

bei einer gegebenen Länge fähig ist, einen $m$mal so großen Zug zu ertragen, als er unter der Wirkung der Last W und seines eigenen Gewichtes zu ertragen braucht.

Das Gewicht W_1 dieses Stabes ist durch die Formel μKL dargestellt, und man hat demnach

$$W_1 = \frac{m\mu L W}{\lambda - m\mu L} \quad \ldots . \ (601).$$

§. 394. Zweitens. Man nehme jetzt an, der Querschnitt des Stabes sei veränderlich und diese Veränderlichkeit sei von der Art, daß der Stab in einem jeden Punkte eine Stärke besitzt, vermöge welcher er daselbst einen $m$mal so großen Zug, ohne zu brechen, ertragen kann, als er wirklich auszuhalten hat. Bezeichnet nun K den Querschnitt in irgend einem Punkte, dessen Abstand von dem unteren Ende, an welchem das Gewicht W aufgehängt ist, durch x dargestellt wird; so ist das Gewicht des Stabtheiles unterhalb jenes Punktes gleich $\int \mu K dx$, oder wenn das spezifische Gewicht oder die Dichtigkeit des Materiales überall dasselbe ist, gleich $\mu \int K dx$. Da nun die absolute Festigkeit des Stabes in jenem Punkte gleich λK ist; so hat man

$$m\left(W + \mu \int K dx\right) = \lambda K.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck in Beziehung zu x, indem man beachtet, daß K eine Funktion von x ist; so erhält man

$$m\mu K dx = \lambda \frac{dK}{dx} dx \text{ oder } m\mu K = \lambda \frac{dK}{dx},$$

d. i., wenn man mit λK dividirt,

$$\frac{1}{K} \frac{dK}{dx} = \frac{m\mu}{\lambda}.$$

Da nun $\frac{1}{K} \frac{dK}{dx} = \frac{d(\log K)}{dx}$ ist; so hat man auch

$$d\,(\log \mathrm{K}) = \frac{m\mu}{\lambda}\,dx.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Gränzen o und x und bezeichnet die Fläche des tiefsten Querschnittes, also den Werth von K für $x=o$, mit K_0; so erhält man

$$\log \mathrm{K} - \operatorname{long} \mathrm{K}_0 = \log \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}_0} = \frac{m\mu}{\lambda}\,x$$

und hieraus

$$\mathrm{K} = e^{\frac{m\mu}{\lambda}x} \, . \, \mathrm{K}_0 \, ,$$

worin e die Basis 2,71828 der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Da nun der Zug, welchen der Querschnitt K_0 auszuhalten hat, gleich W ist; so muß man auch $\lambda \mathrm{K}_0 = m\mathrm{W}$ haben, und hierdurch wird der vorstehende Ausdruck von K

$$\mathrm{K} = \frac{m\mathrm{W}}{\lambda} \, . \, e^{\frac{m\mu}{\lambda}x} \quad \ldots . \; (602).$$

Das ganze Gewicht W_2 des Stabes ist durch die Formel

$$\mathrm{W}_2 = \mu \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{K}\,dx = \frac{m\mu \mathrm{W}}{\lambda} \int_0^{\mathrm{L}} e^{\frac{m\mu}{\lambda}x}\,dx = \mathrm{W}\left(e^{\frac{m\mu \mathrm{L}}{\lambda}} - 1\right) \,.\,. (603)$$

dargestellt.

Ein nach diesen Bedingungen konstruirter Stab ist offenbar ebenso stark, als ein Stab von gleichförmigem Querschnitte, dessen Gewicht W_1 durch Gleichung (601) bestimmt ist, wenn man in beiden Fällen für m denselben Werth annimmt. Die Materialersparung, welche dadurch bewirkt wird, daß man dem Stabe, dem Seile oder der Kette einen nach dem Gesetze der Gleichung (602) veränderlichen Querschnitt gibt, ist demnach durch die Formel

$$\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 = \frac{m\mu \mathrm{L}\mathrm{W}}{\lambda - m\mu \mathrm{L}} - \mathrm{W}\left(e^{\frac{m\mu \mathrm{L}}{\lambda}} - 1\right)$$

oder

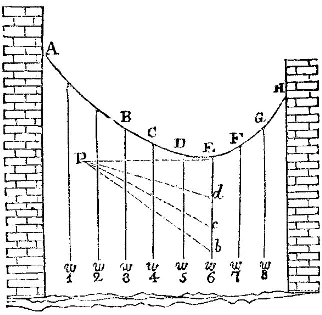
$$\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}\left(\frac{\lambda}{\lambda - m\mu \mathrm{L}} - e^{\frac{m\mu \mathrm{L}}{\lambda}}\right) \quad \ldots . \; (604)$$

dargestellt.

Die Kettenbrücke.

§. 395. Allgemeine Bedingungen einer belasteten Kette.

AEH sei eine biegsame Kette oder ein Seil, welche an zwei festen Punkten A und H aufgehängt und durch Gewichte w_1, w_2, w_3, ... belastet ist, welche in bestimmten Punkten B, C, D, ... ihrer Länge vermittelst Stäbe oder Seile aufgehängt sind.



Durch den tiefsten Punkt E der Kette lege man die Vertikale Eb und nehme auf derselben gerade so viel gleiche Theile, als zwischen dem Punkte E und irgend einem anderen Aufhängepunkte B Gewichtseinheiten mit Einschluß der Gewichte der Stäbe und der Kette selbst, aufgehängt sind. Zieht man hierauf bP parallel zu der Tangente der Kurve im Punkte B, und verlängert die durch E gelegte Tangente EP bis zu dem Durchschnittspunkte P mit der Linie bP; so werden die Linien bP und EP ebenso viel gleiche Theile enthalten, als in den Spannungen der Kettenglieder bei B und E resp. Einheiten enthalten sind, und wenn man durch Ec und Ed die gesammten Gewichte darstellt, welche an den Theilen EC und ED der Kette aufgehängt sind, und alsdann cP und dP zieht; so werden diese Linien in gleicher Weise die Spannungen darstellen, welche sich in den Punkten C und D der Kette äußern. Denn die auf den Theil EB der Kette angebrachten Kräfte sind das Gewicht der Kette, die Gewichte der Aufhängestäbe, die an den Stäben befestigten Gewichte und die Spannungen der Kette bei B und E. Da dieselben unter sich im Gleichgewichte sind; so muß das Prinzip des Polygons der Kräfte (§. 9) darauf Anwendung finden. Konstruirt man nun das entsprechende Polygon; so werden die Seitenlinien desselben, welche durch die verschiedenen Gewichte erzeugt werden, die vertikale Linie Eb bilden und das Polygon (welches sich hier auf ein Dreieck EbP reduzirt) wird durch die Linien bP und EP geschlossen, welche den Richtungen der Spannungen in B und E parallel sind.

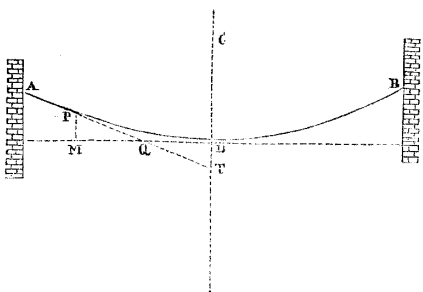
Eine jede dieser letzteren Linien enthält mithin so viel gleiche Theile (§. 9), als in den entsprechenden Spannungen Einheiten enthalten sind. Da ferner die auf den Theil EC der Kurve angebrachten Kräfte die Gewichte sind, deren Gesammtbetrag durch Ec dargestellt wird, und außerdem die Spannungen bei E und C, von denen die erstere sowol in Größe, wie in Richtung, durch EP dargestellt wird; so folgt (§. 9), daß auch die letztere in Größe und Richtung durch die Linie cP, welche das Dreieck EcP schließt, dargestellt wird, und daß mithin cP der Tangente in C parallel ist.

In gleicher Weise leuchtet ein, daß die Spannung bei D der Größe und Richtung nach durch dP dargestellt wird, und daß mithin diese Linie der Tangente an der Kurve in D parallel ist.

Die Kettenlinie.

§. 396. **Wenn ein vollkommen biegsamer Faden oder eine Kette von gleichförmigem Querschnitte zwischen zwei festen Punkten A und B aufgehängt ist und von keinen anderen Kräften, als den Gewichten ihrer Theile angegriffen wird; so nimmt dieselbe die geometrische Form einer krummen Linie an, welche die Kettenlinie heißt.**

Um die Gleichung dieser Kurve zu bestimmen, so sei PT die Tangente in irgend einem Punkte P; dieselbe schneide die durch den tiefsten Punkt D gehende Vertikale CD in T. Zieht man



die Horizontale DM, welche die PT in Q durchschneidet; so sei dies die Abszissenaxe,

$$x = \mathrm{DM}, \quad y = \mathrm{MP}, \quad s = \mathrm{DP},$$

2S die Länge der ganzen Kette, ADB,
$2a$ der horizontale Abstand der beiden Aufhängepunkte, welche als in Einer horizontalen Linie liegend angenommen werden,
H die Tiefe des untersten Punktes der Kurve unter den Aufhängepunkten,
μ das Gewicht einer jeden Längeneinheit der Kette,
T die Spannung im tiefsten Punkte D,
t die Spannung in einem beliebigen Punkte P,
ι die Neigung der Kurve gegen die Vertikale im Punkte P.

Stellt man nun durch die Länge der Linie DT das Gewicht μs des Theiles DP der Kette dar; so hat man in §. 395 gesehen, daß DQ die Spannung t in D und TQ die Spannung T in P darstellt. Da aber bekanntlich

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \mathrm{PQM} = \operatorname{tang} \mathrm{DQT} = \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DQ}} \text{ und } \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DQ}} = \frac{\mu s}{\mathrm{T}}$$

ist; so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu s}{\mathrm{T}}, \ldots. (605).$$

und da

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

also

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ist; so hat man auch

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit ds und integrirt dieselbe alsdann nach bekannten Regeln zwischen den Gränzen o und

s, indem man beachtet, daß für $x=o$ auch $3=o$ sein muß; so erhält man

$$x=\frac{\mathrm{T}}{\mu}\log\left(\frac{\mu s}{\mathrm{T}}+\sqrt{1+\frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}\right)\ldots\ldots(606).$$

oder

$$\frac{\mu s}{\mathrm{T}}+\sqrt{1+\frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}=e^{\frac{\mu x}{\mathrm{T}}}.$$

Hiernach hat man auch

$$\frac{1}{\frac{\mu s}{\mathrm{T}}+\sqrt{1+\frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}}=e^{\frac{-\mu x}{\mathrm{T}}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner des Bruches auf der linken Seite dieser Gleichung mit $\frac{\mu s}{\mathrm{T}}-\sqrt{1+\frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}$ multiplizirt,

$$\frac{\mu s}{\mathrm{T}}-\sqrt{1+\frac{\mu^2 s^2}{\mathrm{T}^2}}=-e^{\frac{-\mu x}{\mathrm{T}}}.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden; so kommt

$$\frac{2\mu s}{\mathrm{T}}=e^{\frac{\mu x}{\mathrm{T}}}-e^{\frac{-\mu x}{\mathrm{T}}};$$

mithin

$$s=\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{T}}{\mu}\left(e^{\frac{\mu x}{\mathrm{T}}}-e^{\frac{-\mu x}{\mathrm{T}}}\right)\ldots\ldots(607).$$

Substituirt man diesen Werth für s in Gleichung (605) und integrirt alsdann die entstehende Gleichung zwischen den Gränzen o und x; so erhält man für die Gleichung der Kettenlinie

$$y=\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{T}}{\mu}\left(e^{\frac{\mu x}{\mathrm{T}}}+e^{\frac{-\mu x}{\mathrm{T}}}\right)\ldots\ldots(608).*)$$

*) In den vorstehenden Formeln bezeichnet e die Basis 2,71828 der natürlichen Logarithmen und log. dergleichen Logarithmen selbst. Will man die Letzteren aus den gewöhnlichen Tabellen entnehmen; so hat man dieselben zuvor mit 2,3026 zu multipliziren.

§. 397. Bestimmung der Spannung T im tiefsten Punkte der Kettenlinie.

Da a die Hälfte des horizontalen Abstandes der Aufhängepunkte und S die halbe Länge der Kette bezeichnet; so muß man in Gleichung (607) gleichzeitig $x = a$, $s = S$ haben. Dies ergibt zur Bestimmung der Spannung T im tiefsten Punkte der Kette die Beziehung

$$\frac{1}{2}\frac{T}{\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{T}} - e^{\frac{-\mu a}{T}}\right) = S, \ldots . (609)$$

woraus der Werth T durch Näherung gefunden werden kann.

§. 398. Bestimmung der Spannung t in irgend einem Punkte der Kettenlinie.

Da die Spannung t bei P durch $\overline{TQ} = \sqrt{\overline{DQ}^2 + \overline{DT}^2}$ dargestellt wird, worin $\overline{DQ}$ die Spannung bei D und $\overline{DT}$ das Gewicht des Kettentheiles DP bezeichnet; so hat man

$$t = \sqrt{T^2 + \mu^2 s^2} \ldots . (610)$$

Nachdem nun der Werth von T durch Gleichung (609) bestimmt ist, so ergibt die vorstehende Gleichung den Werth der Spannung in irgend einem Punkte der Kurve, welche in der Richtung ihrer Länge um s von dem tiefsten Punkte absteht. Die horizontale und vertikale Komponente dieser Spannung t ist resp. T und μs.

§. 399. Bestimmung der Neigung ι der Kurve gegen die Vertikale in irgend einem Punkte.

Da man $\cot \iota = \frac{dy}{dx}$ hat; so folgt aus Gleichung (608), wenn man dieselbe für x differenzirt,

$$\cot \iota = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mu x}{T}} - e^{\frac{-\mu x}{T}}\right) \ldots . (611).$$

Da nach Gleichung (605) $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu s}{T}$ ist; so hat man auch

$$\cot\iota = \frac{\mu s}{T} \quad \ldots \quad (611^a).$$

und demnach wegen Gleichung (606)

$$x = s \operatorname{tang}\iota \,.\, \log\left(\cot\iota + \sqrt{1+\cot^2\iota}\right)$$

oder auch

$$\frac{x}{s} = \operatorname{tang}\iota \log\left(\cot\iota + \frac{1}{\sin\iota}\right) = \operatorname{tang}\iota . \log\cot\frac{\iota}{2} = -\operatorname{tang}\iota \,.\, \log\operatorname{tang}\frac{\iota}{2}.$$

Setzt man hierin $x = a$ und $s = S$; so ergibt sich zur Bestimmung der Neigung ι_1 der Kurve gegen die Vertikale in Einem der beiden Aufhängepunkte

$$-\operatorname{tang}\iota_1 \,.\, \log\operatorname{tang}\frac{\iota_1}{2} = \frac{a}{S} \quad \ldots \quad (612).$$

Diese Gleichung kann durch Näherung für ι_1 aufgelös't werden, und alsdann kann der Werth der Spannung T im tiefsten Punkte der Kurve durch die Beziehung $\cot\iota_1 = \frac{\mu S}{T}$ oder

$$T = \mu S \operatorname{tang}\iota_1$$

gefunden werden.

§. 400. **Wenn eine Kette von gegebener Länge 2S zwischen zwei in derselben horizontalen Linie gegebenen Punkten aufgehängt ist; so soll die Tiefe H des untersten Punktes derselben unter den Aufhängepunkten, und umgekehrt, wenn die Tiefe H des untersten Punktes gegeben ist, so soll die erforderliche Länge 2S der Kette bestimmt werden.**

Da man allgemein für jede Kurve $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, also auch $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$ hat; so folgt aus der Differenzialgleichung (605) für die Kettenlinie

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{T^2}{\mu^2 s^2}}} = \frac{\mu s}{\sqrt{T^2+\mu^2 s^2}}.$$

Multiplizirt man mit ds und integrirt alsdann zwischen den Gränzen o und s, indem man beachtet, daß für $y=o$ auch $s=o$ sein muß; so erhält man

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{T^2+\mu^2 s^2} - T\right), \ldots . (613).$$

und wenn man diese Gleichung für s auflöst,

$$s = \sqrt{y\left(y+\frac{2T}{\mu}\right)} \ldots . (614).$$

Setzt man in den letzten beiden Gleichungen gleichzeitig $y=H$ und $s=S$; so erhält man

$$H = \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{T^2+\mu^2 S^2} - T\right) \ldots . (615).$$

$$S = \sqrt{H\left(H+\frac{2T}{\mu}\right)} \ldots . (616).$$

Wenn die Länge S gegeben ist; so findet man die Tiefe H aus Gleichung (615), nachdem man zuvor mittelst Gleichung (609) oder durch das in §. 399 angegebene Verfahren den Werth von T bestimmt hat. Ist jedoch H gegeben und S gesucht; so hat man aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{T}{\mu}\left(e^{\frac{ma}{T}} - e^{\frac{-\mu a}{T}}\right) = \sqrt{H\left(H+\frac{2T}{\mu}\right)},$$

welche sich aus den beiden Gleichungen (609) und (616) ergibt, oder aus der einfacheren Beziehung

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{T}{\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{T}} + e^{\frac{-\mu a}{T}}\right) = H \quad , \ldots (616^a),$$

welche sich aus der Gleichung (608) ergibt, wenn man darin

$x=a, y=H$ setzt, zuvörderst durch Näherung den Werth von T zu ermitteln und denselben in Gleichung (616) zu substituiren.

§. 401. Bestimmung des Schwerpunktes der Kettenlinie.

Wenn G die Höhe des Schwerpunktes einer jeden Hälfte, wie DA, oder auch der ganzen Kurve ADB über dem tiefsten Punkte D bezeichnet; so hat man nach §. 32

$$G=\int_0^S y\,d\,s=\int_0^a y\frac{ds}{dx}dx.$$

Substituirt man hierin für y und $\frac{ds}{dx}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (608) und (607), indem man die letztere für x differenzirt; so kommt

$$G=\tfrac{1}{4}\frac{T}{\mu}\int_0^a\left(e^{\frac{\mu x}{T}}+e^{\frac{-\mu x}{T}}\right)^2 dx.$$

Entwickelt man das Quadrat des Binoms unter dem Integralzeichen und führt dann die Integration aus; so ergibt sich

$$G=\tfrac{1}{4}\frac{T}{\mu}\left[\frac{T}{2\mu}\left(e^{\frac{2\mu}{T}}-e^{\frac{-2\mu a}{T}}\right)+2a\right] \quad \ldots \quad (617).$$

Da man nach den beiden Gleichungen (609) und (616[a])

$$SH=\tfrac{1}{2}\frac{T}{\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{T}}-e^{\frac{-\mu a}{T}}\right)\times\tfrac{1}{2}\frac{T}{\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{T}}+e^{\frac{-\mu a}{T}}\right)=\frac{T^2}{4\mu^2}\left(e^{\frac{2\mu a}{T}}=e^{\frac{-2\mu a}{T}}\right)$$

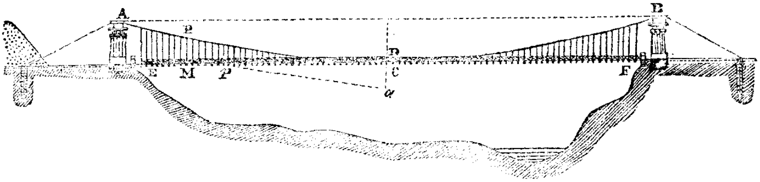
hat; so folgt aus der vorstehenden Gleichung auch

$$G=\tfrac{1}{2}\left(SH+\frac{Ta}{\mu}\right) \quad \ldots \quad (618).$$

§. 402. Die Kettenbrücke von der größten Stärke, wenn das Gewicht der Aufhängestäbe vernachlässigt wird.

Wenn **ADB** den Zug einer jeden der beiden Ketten und **EF** die Fahrbahn darstellt, so sei unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus §. 396

K die Gesammtfläche der Querschnitte der zu beiden Seiten der Fahrbahn liegenden Ketten in einem beliebigen Punkte **P**, dessen Koordinaten x und y sind,



μ_1 das Gewicht einer jeden Kubikeinheit des Materiales der Ketten,

μ_2 das Gewicht einer jeden Längeneinheit der Fahrbahn,

v das ganze Gewicht, welches irgend ein Theil **DP** der Ketten von der Länge s (mit Ausschluß der vertikalen Aufhängestäbe zu tragen hat). Außerdem sollen die Ketten fähig sein, in einem jeden Punkte eine

m mal so große Spannung zu ertragen, als sie unter der Wirkung der darauf angebrachten Kräfte wirklich zu ertragen brauchen.

Da hiernach das Gewicht der Ketten von der Länge **DP** gleich s durch $\mu_1 \int \mathrm{K} ds$ und das Gewicht des Theiles **CM** der Fahrbahn durch $\mu_2 x$ dargestellt wird; so hat man für die gesammte Belastung des Theiles **DP** der Ketten (mit Ausschluß der Aufhängestäbe)

$$v = \mu_1 \int \mathrm{K} ds + \mu_2 x \quad \ldots . \; (619).$$

Stellt man diese Belastung durch die vertikale Linie Da und die Spannung **T** im tiefsten Punkte **D** der Ketten durch die horizontale Linie Dp dar; so wird die Linie ap der Tangente der Kurve in P parallel sein und die Spannung der Ketten in jenem Punkte der Größe nach darstellen (§. 395). Demnach hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\mathrm{T}} \quad \ldots\ldots (620).$$

Da nun die durch ap dargestellte Spannung der Ketten im Punkte P gleich $\sqrt{\mathrm{T}^2 + u^2}$ ist, und die Stärke der Ketten so groß sein soll, daß dieselben eine $m$mal so große Spannung ertragen können, ohne zu zerreißen, so hat man

$$\lambda \mathrm{K} = m \sqrt{\mathrm{T}^2 + v^2} \quad \ldots\ldots (621)$$

Hierin ist für das Maaß der absoluten Festigkeit λ der Werth aus der Tabelle am Ende dieses Werkes zu entnehmen, wenn allen Längen der Zoll zur Einheit unterliegt; dagegen wäre 144λ an die Stelle von λ zu setzen, wenn man alle Längen nach Fußen messen wollte.

Aus den Gleichungen (621) und (620) folgt

$\lambda \mathrm{K} = m\mathrm{T}\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{T}^2}} = m\mathrm{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, und da allgemein $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{ds}{dx}$ ist; so hat man $\lambda \mathrm{K} = m\mathrm{T}\frac{ds}{dx}$ oder $\frac{ds}{dx} = \frac{\lambda \mathrm{K}}{m\mathrm{T}} = \frac{\sqrt{\mathrm{T}^2 + v^2}}{\mathrm{T}}$ und auch $\mathrm{K} = \frac{m\sqrt{\mathrm{T}^2 + v^2}}{\lambda}$. Substituirt man diese Werthe von K und $\frac{ds}{dx}$ in Gleichung (619), indem man daselbst $\mathrm{K}ds = \mathrm{K}\frac{ds}{dx}dx$ setzt; so ergibt sich

$$v = \frac{m\mu_1}{\lambda \mathrm{T}} \int (\mathrm{T}^2 + v^2)\, dx + \mu_2 x.$$

Differenzirt man diese Gleichung in Beziehung zu x, indem man beachtet, daß $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{dx}$, d. i. nach Gleichung (620) $= \frac{v}{\mathrm{T}}\,\frac{dv}{dy}$ ist; so erhält man

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{\mathrm{T}}\frac{dv}{dy}=\frac{m\mu_1}{\lambda\mathrm{T}}\,(\mathrm{T}^2+v^2)+\mu_2=\frac{m\mu_1}{\lambda\mathrm{T}}\left(v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}\right)$$

und demnach

$$\frac{dx}{dv}=\frac{\lambda\mathrm{T}}{m\mu_1}\cdot\frac{1}{v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}\quad\text{und}$$

$$\frac{dy}{dv}=\frac{\lambda}{m\mu_1}\cdot\frac{v}{v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x=\frac{\lambda\mathrm{T}}{m\mu_1}\int_0^v\frac{dv}{v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}\quad\text{und}\quad y=\frac{\lambda}{m\mu_1}\int_0^v\frac{v\,dv}{v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}.$$

Führt man diese Integrationen nach bekannten Regeln aus; so ergibt sich

$$x=\frac{\lambda\mathrm{T}}{m\mu_1\sqrt{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}}\operatorname{arctang}\frac{v}{\sqrt{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}}\quad\ldots\ldots\;(622)$$

und

$$y=\frac{\lambda}{2m\mu_1}\log\left(\frac{v^2+\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}\right)=\frac{\lambda}{2m\mu_1}\log\left(\frac{v^2}{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}+1\right).$$

Substituirt man in die letztere Gleichung den Werth von

$$\frac{v}{\sqrt{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}}=\operatorname{tang}\left(\frac{m\mu_1}{\lambda\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{T}^2+\frac{\lambda\mathrm{T}\mu_2}{m\mu_1}}\,.\,x\right)$$

$$=\operatorname{tang}\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1}}\,.\,x\right),$$

welcher sich aus Gleichung (622) ergibt, und beachtet, daß allgemein $\tan^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ und demnach $\frac{1}{2}\log(\tan^2\varphi + 1) = \log \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)$ ist; so erhält man für die Gleichung der Kette von gleichförmiger Haltbarkeit und mithin für die **von der größten Stärke bei einer gegebenen Menge von Material**

$$y = \frac{\lambda}{m\mu_1} \log \frac{1}{\cos\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1 + \frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1} \cdot x}\right)} \quad \ldots \ldots (623).$$

§. 403. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem sich die Fläche K der Querschnitte der Ketten einer Kettenbrücke von der größten Stärke verändern muß.

Setzt man den aus Gleichung (622) für v sich ergebenden Werth in Gleichung (621); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\mathrm{K} = \frac{m\,\mathrm{T}}{\lambda}\sqrt{1 + \left(1 + \frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1}\right)\tan^2\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1 + \frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1} \cdot x}\right)} \quad \ldots \ldots (624).$$

Aus dieser Formel leuchtet ein, daß die Fläche der Querschnitte der Ketten einer Kettenbrücke von gleichförmiger Haltbarkeit und mithin von der größten Materialersparung von dem tiefsten Punkte, wo $x = o$ ist, bis zu dem höchsten, wo $x = a$ ist, fortwährend zunimmt.

Da $\frac{ds}{dx} = \frac{\lambda\,\mathrm{K}}{m\,\mathrm{T}}$ ist; so hat man auch

$$s = \frac{\lambda}{m\mathrm{T}}\int \mathrm{K}\,dx.$$

Substituirt man hierin für K den vorstehenden Werth; so kann die Integration nach bekannten Regeln ausgeführt und der Werth von s als Funktion von x und demnach auch die halbe Länge S der Ketten als Funktion der halben Spannweite a bestimmt werden. Die Formel ist ihrer Länge wegen hier ausgelassen.

§. 404. Bestimmung des Gewichtes W einer jeden Hälfte der Ketten einer Kettenbrücke von der größten Stärke.

Wenn w das Gewicht eines Theiles DP der Ketten von der Länge s bezeichnet; so hat man offenbar $w = \mu_1 \int K\, ds$ d. i. nach Gleichung (619) $= v - \mu_2 x$. Substituirt man hierin für v den Werth, welcher sich aus Gleichung (622) ergibt; so erhält man

$$w = T\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{mT\mu_1}} \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{mT\mu_1}} \cdot x\right) - \mu_2 x$$

und hieraus folgt

$$W = T\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{mT\mu_1}} \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{mT\mu_1}} \cdot a\right) - \mu_2 a \quad \ldots \ldots (625).$$

§. 405. Bestimmung der Spannung T im tiefsten Punkte D der Ketten von gleichförmiger Haltbarkeit.

Wenn H die Tiefe des untersten Punktes D unter den Aufhängepunkten bezeichnet; so hat man nach Gleichung (623), wenn man darin $x = a$ und $y = H$ setzt,

$$H = \frac{\lambda}{m\mu_1} \log \frac{1}{\cos\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{mT\mu_1}} \cdot a\right)} .$$

Löſ't man diese Gleichung für T auf; so kommt

$$T = \frac{\lambda\mu_2}{m\mu_1\left[\left(\frac{\lambda}{m\mu_1 a} \arccos e^{\frac{-m\mu_1 H}{\lambda}}\right)^2 - 1\right]} \quad \ldots \ldots (626).$$

Wenn man den Werth von T kennt; so ergibt sich der Werth der Spannung t in irgend einem Punkte P der Ketten durch die Beziehung

$$t = \sqrt{T^2 + v^2},$$

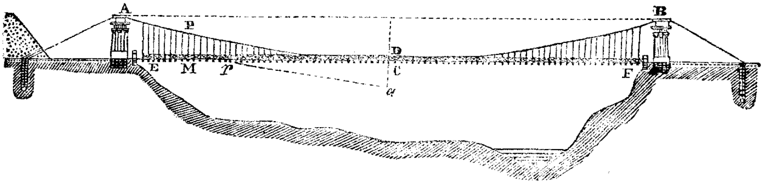
worin die vertikale Komponente v der Spannung t nach Gleichung (622) den Werth

$$v = \mathrm{T}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1}}\ \mathrm{tang}\left(\frac{m\mu_1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda\mu_2}{m\mathrm{T}\mu_1}}\cdot x\right)$$

hat.

§. 406. Die Kettenbrücke von der größten Stärke, wenn die Gewichte der Aufhängestäbe mit in Betracht gezogen werden.

Man denke sich die Aufhängestäbe durch eine stetige biegsame Platte ersetzt, welche die Fahrbahn mit den Ketten verbin-



det und eine solche gleichförmige Dicke hat, daß das darin enthaltene Material genau dasselbe Gewicht besitzt, wie das Material der Aufhängestäbe auf beiden Seiten der Brücke. Es leuchtet ein, daß die Bedingungen für das Gleichgewicht unter dieser Hypothese sehr nahe dieselben sein werden, wie die in dem wirklichen Falle. Bezeichnet nun μ_3 das Gewicht einer jeden Quadrateinheit dieser Platte; so wird $\mu_3\int y\,dx$ das Gewicht desjenigen Theiles derselben darstellen, welcher an dem Theile DP der Ketten aufgehängt ist, und die gesammte Belastung v dieses Kettentheiles wird demnach

$$v = \mu_1\int \mathrm{K}\,ds + \mu_2 x + \mu_3\int y\,dx \quad \ldots . \quad (627)$$

sein. Wie in §. 402, so kann auch hier gezeigt werden, daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\mathrm{T}} \text{ und } \lambda\mathrm{K} = m\sqrt{\mathrm{T}^2+v^2} \quad \ldots . \quad (628)$$

und demnach $\int \mathrm{K}\, d\,s = \frac{m}{\lambda \mathrm{T}} \int (\mathrm{T}^2 + v^2)\, dx$ ist. Substituirt man diesen Werth in Gleichung (627), differenziirt alsdann in Beziehung zu x, indem man beachtet, daß $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{v}{\mathrm{T}} \frac{dv}{dy}$ ist (s. §. 402) so erhält man

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{\mathrm{T}} \frac{dv}{dy} = \frac{m\mu_1}{\lambda \mathrm{T}} (\mathrm{T}^2 + v^2) + \mu_2 + \mu_3 y \quad \ldots . \; (629).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{m\mu_1}{\lambda} = \alpha; \quad \ldots . \; (630)$$

so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung nach gehöriger Reduktion

$$\frac{d(v^2)}{dy} - 2\alpha v^2 = 2\mathrm{T}(\mu_3 y + \alpha \mathrm{T} + \mu_2).$$

Diese Gleichung, welche in Beziehung zu v^2 lineär ist, läßt sich nach bekannten Methoden integriren; man erhält hierdurch

$$v^2 e^{-2\alpha y} = 2\mathrm{T} \int (\mu_3 y + \alpha \mathrm{T} + \mu_2) e^{-2\alpha y} dy = \text{const.}$$

Nimmt man an, die Länge des kürzesten Aufhängestabes DC sei b, führt alsdann die Integration auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung zwischen den Gränzen b und y aus, indem man beachtet, daß für $y = b$ $v = o$ sein muß; so ergibt sich

$$v^2 e^{-2\alpha y} = \frac{\mathrm{T}}{\alpha} \left[\mu_3 (b e^{-2\alpha b} - y e^{-2\alpha y}) + \left(\frac{\mu_3}{2\alpha} + \alpha \mathrm{T} + \mu_2 \right) (e^{-2\alpha b} - e^{-2\alpha y}) \right]$$

und hieraus

$$v^2 = \frac{\mathrm{T}}{\alpha} \left[\mu_3 (b e^{-2\alpha(y-b)} - y) + \left(\frac{\mu_3}{2\alpha} + \alpha \mathrm{T} + \mu_2 \right) (e^{-2\alpha(y-b)} - 1) \right] \quad \ldots . \; (631).$$

Substituirt man diesen Werth von v^2 in Gleichung (628) und reduzirt gehörig; so kommt

$$\mathrm{K} = \frac{\sqrt{\alpha \mathrm{T}}}{\mu_1} \sqrt{\left(\frac{\mu_3}{2\alpha} + \mu_3 b + \alpha \mathrm{T} + \mu_2 \right) e^{2\alpha(y-b)} - \mu_3 y - \frac{\mu_3}{2\alpha} - \mu_2}, \quad \ldots . \; (632)$$

eine Formel, durch welche das Gesetz der Veränderlichkeit des Querschnittes **K** sämmtlicher Ketten einer Kettenbrücke von gleichförmiger Haltbarkeit dargestellt wird.

Differenziirt man die Gleichung $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{\mathrm{T}}$ in Beziehung zu x; so erhält man $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{dv}{dx}$. Substituirt man hierin für $\frac{dv}{dx}$ seinen Werth aus Gleichung (629); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion und mit Berücksichtigung der Gleichung (630)

$$\mathrm{T}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\alpha}{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^2+v^2)+\mu_2+\mu_3 y,$$

und wenn man hierin für v^2 seinen Werth aus Gleichung (631) setzt,

$$\mathrm{T}\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\mu_3}{2\alpha}+\mu_3 b+\alpha\mathrm{T}+\mu_2\right)e^{2\alpha(y-b)}-\frac{\mu_3}{2\alpha}.$$

Multiplizirt man auf beiden Seiten mit dy und beachtet, daß $dy\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ist, integrirt alsdann zwischen den Gränzen b und y, indem man bemerkt, daß für $y=b$ $\frac{dy}{dx}=o$ ist; so erhält man

$$\alpha\mathrm{T}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{\mu_3}{2\alpha}+\mu_3 b+\alpha\mathrm{T}+\mu_2\right)(e^{2\alpha(y-b)}-1)-\mu_3(y-b).$$

Nun beachte man, daß der Werth von λ in allen praktischen Fällen im Vergleich zu den Werthen von μ_1 und m ungemein groß und demnach der Werth von α (Gleichung 630) sehr klein ist, sodaß man ohne merklichen Fehler in der Reihe für $e^{2\alpha(y-b)}$ alle Glieder, welche höhere Potenzen von $2\alpha(y-b)$, als die erste, enthalten, gegen die Einheit vernachlässigen kann. Unter dieser Voraussetzung hat man $e^{2\alpha(y-b)}-1=2\alpha(y-b)$, und die vorstehende Gleichung wird

$$\mathrm{T}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2(\mu_3 b+\alpha c+\mu_2)(y-b).$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, dividirt dann mit der rechten Seite der entstehenden Gleichung, multiplizirt mit dx und integrirt; so kommt

$$x^2 = \left(\frac{2\mathrm{T}}{\mu_3 b + \alpha \mathrm{T} + \mu_2}\right)(y - b) \quad \ldots \quad (633).$$

Durch diese Gleichung wird eine Parabel dargestellt, deren Scheitel in D liegt und deren Axe vertikal steht.

Substituirt man in diese Gleichung für x und y die Werthe a und H, und löst dieselbe in Beziehung zu T auf; so erhält man für die Spannung im tiefsten Punkte der Kurve

$$\mathrm{T} = \frac{(\mu_2 + \mu_3 b) a^2}{2\mathrm{H} - 2b - \alpha a^2} \quad \ldots \quad (634).$$

Durch eine ähnliche Abkürzung, wie die vorhin gemachte, reduzirt sich der Ausdruck von v^2 aus Gleichung (631) auf

$$v^2 = 2\mathrm{T}(\mu_3 b + \alpha \mathrm{T} + \mu_2)(y - b); \quad \ldots \quad (634^a).$$

Nachdem nun durch Gleichung (634) der Werth von T bekannt ist, findet man die Spannung t, deren horizontale und vertikale Komponente T und v ist, für irgend einen anderen Punkt der Kurve durch die Formel

$$t = \sqrt{\mathrm{T}^2 + v^2} = \sqrt{\mathrm{T}^2 + 2\mathrm{T}(\mu_3 b + \alpha \mathrm{T} + \mu_2)(y - b)}, \quad \ldots \quad (634^b)$$

und die Länge y irgend eines Aufhängestabes, welcher um x von der Mitte D der Spannweite absteht, ergibt sich aus Gleichung (633). Der Querschnitt K der Ketten in einem beliebigen Punkte kann endlich nach der Formel (632) berechnet werden, welche sich unter der obigen Vereinfachung auf

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha \mathrm{T}}{\mu_1} \sqrt{2\left(\frac{\mu_3 b + \mu_2}{\mathrm{T}} + \alpha\right)(y - b) + 1} \quad \ldots \quad (635)$$

reduzirt.

§. 407. Wenn der Querschnitt der Ketten in allen Punkten dieselben Dimensionen hat, wie Dies bei den gewöhnlichen Kettenbrücken der Fall ist; so sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht angegeben werden.

Bezeichnet man hier wo der Querschnitt K der Ketten konstant ist, mit μ_1 das Gesammtgewicht einer jeden Längeneinheit der beiden Ketten, und behält die übrigen Bezeichnungen der früheren Paragraphe bei; so hat man nach Gleichung (619), wenn man das Gewicht der Aufhängestäbe vernachlässigt,

$$v = \mu_1 s + \mu_2 x \quad \ldots \quad (636).$$

Differenziirt man diese Gleichung in Beziehung zu x, und beachtet, daß $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{v^2}{T^2}}$ (Gleichung 620), daß ferner $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}\,\frac{v}{T}$ ist; so erhält man

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\,\frac{v}{T} = \mu_1 \sqrt{1+\frac{v^2}{T^2}} + \mu_2.$$

Hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$x = \int_0^v \frac{T\,dv}{\mu_1\sqrt{T^2+v^2}+\mu_2 T},\quad y = \int_0^v \frac{v\,dv}{\mu_1\sqrt{T^2+v^2}+\mu_2 T}.$$

Die erste dieser Gleichungen kann rational gemacht werden, wenn man $\sqrt{T^2+v^2} = T + vz$ setzt, und die zweite, wenn man $\sqrt{T^2+v^2} = z$ setzt; hierdurch erhält man

$$x = 2T\int_0^z \frac{(1+z^2)\,dz}{(1-z^2)[(\mu_1+\mu_2)(\mu_1-\mu_2)z^2]},$$

$$y = \int_T^z \frac{z\,dz}{\mu_1 z + \mu_2 T} = \frac{1}{\mu_1}\int_T^z \left(1 - \frac{\mu_2 T}{\mu_1 z + \mu_2 T}\right) dz.$$

Führt man die Integration der letzteren Formel aus und setzt dann für z seinen Werth $\sqrt{T^2+v^2}$; so kommt

$$y = \frac{1}{\mu_1}\left[\sqrt{T^2+v^2} - T - \frac{\mu_2 T}{\mu_1}\log\frac{\mu_1\sqrt{T^2+v^2}+\mu_2 T}{(\mu_1+\mu_2)T}\right] \quad \ldots \quad (637).$$

Zerlegt man die rationale Funktion unter dem Integralzeichen der ersteren Formel in Beziehung zu z^2 nach bekannten Regeln in Partialbrüche; so wird dieselbe

$$x = \frac{2T}{\mu_1} \int_0^z \left[\frac{1}{1-z^2} - \frac{\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)+(\mu_1-\mu_2)z^2} \right] dz.$$

Das Integral des ersten Gliedes in diesem Ausdrucke ist $\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ und das des zweiten Gliedes ist entweder

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2-\mu_2^2}} \operatorname{arc\,tang} z \sqrt{\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}} \text{ oder}$$

$$\frac{\mu_2}{2\sqrt{\mu_2^2-\mu_1^2}} \log \frac{\sqrt{\mu_2+\mu_1}+z\sqrt{\mu_2-\mu_1}}{\sqrt{\mu_2+\mu_1}-z\sqrt{\mu_2-\mu_1}},$$

jenachdem μ_1 größer oder kleiner ist, als μ_2, oder jenachdem das Gewicht einer jeden Längeneinheit der Ketten größer ist, als das Gewicht einer jeden Längeneinheit der Fahrbahn.

Substituirt man für z seinen Werth $\frac{\sqrt{T^2+v^2}-T}{v}$; so ergibt sich für diese beiden Fälle

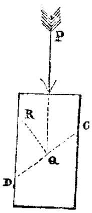
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{T}{\mu_1} \left\{ \log \frac{(v-T)+\sqrt{v^2+T^2}}{(v+T)-\sqrt{v^2+T^2}} - \frac{2\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2-\mu_2^2}} \operatorname{arc\,tang} \left[\sqrt{\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{T^2}{v^2}} - \frac{T}{v} \right) \right] \right\} \\ x &= \frac{T}{\mu_1} \left\{ \log \frac{(v-T)+\sqrt{v^2+T^2}}{(v+T)-\sqrt{v^2+T^2}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2-\mu_1^2}} \log \frac{v\sqrt{\mu_2+\mu_1}+(\mu_2-\mu_1)(\sqrt{v^2+T^2}-T)}{v\sqrt{\mu_2+\mu_1}-(\mu_2-\mu_1)(\sqrt{v^2+T^2}-T)} \right\} \end{aligned}\right\} (638).$$

Wenn die gegebenen Werthe a und $\mathbf{H}$ für x und y in die Gleichungen (638) und (637 substituirt werden; so erhält man zwei Gleichungen, aus denen der Werth der Konstanten $\mathbf{T}$ und und der Werth von v, welcher den Aufhängepunkten entspricht, durch Näherung bestimmt werden kann. Substituirt man alsdann in die Gleichungen (637) und (638) für v eine Reihe von Werthen, welche, von dem gefundenen anfangend, bis null abnehmen; so erhält man ebenso viel entsprechende Werthe für x und y, und wird dadurch in den Stand gesetzt, die Kurve der Ketten mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit zu verzeichnen

Diese gewöhnliche Konstruktionsmethode, nach welcher man den Ketten einen gleichförmigen Querschnitt gibt, ist offenbar in ihrem Prinzipe falsch: die Stärke einer Brücke wird bei einer gleichen Menge von Material weit größer sein, wenn sich der Querschnitt der Ketten nach dem durch Gleichung (624) bestimmten Gesetze ändert.

Rückwirkende Festigkeit.

§. 408. Aus den Versuchen von Hodgkinson (seventh Report of the British Association of Science) über die rückwirkende Festigkeit kurzer Prismen von verschiedenen Höhen, aber gleichen Querschnitten, geht hervor: erstens, daß wenn die Prismen eine gewisse Höhe überschritten haben, die zerdrückende Kraft dieselbe bleibt, wenn sich auch die Höhe vermehrt, bis eine zweite Gränze in der Höhe der Prismen erreicht wird, wo sie anfangen, nicht in Folge eines Abgleitens der oberen Theile auf den unteren, wie sie früher thaten, sondern in Folge einer Biegung zu brechen oder zu zerknicken (s. §. 432). Zweitens, daß die Brechungsebene immer unter demselben Winkel gegen die Grundfläche der Prismen geneigt ist, wenn ihre Höhe zwischen jenen Gränzen liegt. Diese beiden Erscheinungen erklären sich durch einander: denn wenn K den Querschnitt des Prismas und ι den konstanten Neigungswinkel der Brechungsebene gegen die Grundfläche bezeichnet; so wird $\frac{K}{\cos \iota}$ die Fläche der Brechungsebene darstellen. Bezeichnet man nun mit γ den Widerstand, welchen die Kohäsion des Materiales für eine jede Flächeneinheit einer Kraft entgegensetzt, welche, parallel zu der Brechungsebene wirkend, die Trennung zweier Theile des Materiales bewirkt; so stellt $\frac{\gamma K}{\cos \iota}$ den Widerstand dar, welchen die Kohäsion des Materiales dem Bruche in paralleler Richtung zu der Brechungsebene entgegensetzt. Bezeichnet man ferner mit P die im Scheitel des Prismas angebrachte vertikale Kraft, welche den Bruch in der Ebene CD herbeiführt; so leuchtet ein, daß die Neigung der



Richtung von P gegen die Normale QR auf der Ebene CD oder die Neigung ι von CD gegen die horizontale Grundfläche des Prismas größer sein muß, als der Reibungswinkel φ für die sich trennenden Flächen: denn wäre Dies nicht der Fall; so würde keine in der Richtung von P angebrachte Kraft im Stande sein, ein Gleiten der Flächen aufeinander hervorzubringen, selbst wenn eine Trennung derselben längs ihrer Ebene bereits stattgefunden hätte. Zerlegt man nun P in zwei andere Kräfte, von denen die Eine, $P\cos\iota$, auf der Brechungsebene perpendikular steht, und die andere, $P\sin\iota$, dieser Ebene parallel ist; so wird die von der ersteren in der Richtung der Ebene DC erzeugte Reibung $= P\cos\iota\tang\varphi$, und demnach der ganze in der Richtung DC sich äußernde Widerstand, (bei Vernachlässigung des geringen Gewichtes des oberen Theiles des Prismas selbst) $= P\cos\iota\tang\varphi + \frac{\gamma K}{\cos\iota}$ sein. Da derselbe durch die zweite Komponente $P\sin\iota$ von P in der Richtung CD überwunden werden muß; so hat man

$$P\sin\iota = P\cos\iota\,.\,\tang\varphi + \frac{\gamma K}{\cos\iota},$$

und hieraus folgt nach gehöriger Reduktion

$$P = \frac{\gamma\cos\varphi}{\cos\iota\,.\,\cos(\iota+\varphi)}K = \frac{2\gamma\cos\varphi}{\sin(2\iota-\varphi)-\sin\varphi}K \quad \ldots (639)$$

Zuvörderst sieht man hieraus, daß der Werth von P konstant ist, wenn der Neigungswinkel ι der Brechungsebene gegen den Horizont konstant bleibt. Diese Behauptung ist selbst dann noch richtig, wenn das Maaß γ der Kohäsionskraft für dasselbe Material mit der Richtung der zu trennenden Flächen variirte, weil in dem Falle, wo ι denselben Werth behält, die Trennung immer in Ein und derselben Richtung stattfindet.

Wenn der Widerstand γ für die Flächeneinheit, welchen die Kohäsionskraft der Trennung zweier Flächen in der Richtung dieser Flächen entgegensetzt, nach allen Seiten sich gleich bliebe; so würde sich die Brechungsebene CD unter dem Winkel

$$\iota = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad \ldots . \; (640)$$

gegen die Grundfläche des Prismas neigen, weil für diesen Werth von ι der Werth der Kraft P aus Gleichung (639) ein Minimum würde, welches offenbar bei einer allmähligen Steigerung der Kraft P hinreichte, um den Bruch zu erzeugen.

Die Versuche von Hodgkinson haben gezeigt, daß die wirkliche Neigung der Brechungsebene mit dem Materiale der Prismen variirt. Bei Gußeisen z. B. variirte sie, je nach der Qualität des Eisens von 48 bis 58° und war für verschiedene Gattungen verschieden. Aus dieser Abhängigkeit des Brechungswinkels von der Beschaffenheit des Materiales geht hervor, daß der Werth der Größe γ für eine jede Richtung der Brechungsebenen nicht derselbe ist, oder daß der Werth von φ mit der Qualität des Schmiedeeisens sehr stark variirt.

Wenn man die Gleichung (639) für γ auflös't; so erhält man den Ausdruck

$$\gamma = \frac{P}{K} \; \frac{\cos \iota \,.\, \sin (\iota - \varphi)}{\cos \varphi}, \; \ldots \; (641)$$

aus welchem der Werth von γ für irgend ein Material bestimmt werden kann, wenn man den Reibungswinkel φ für zwei Bruchflächen dieses Materiales kennt, und die den Bruch herbeiführende Kraft P, sowie den Brechungswinkel ι beobachtet hat.

Für Ein und dasselbe Material und innerhalb der Höhengränzen, zwischen welchen der Bruch der Prismen ohne Biegung erfolgt, ist die zerdrückende Kraft P ein konstantes Vielfaches des Querschnittes K (Gleichung 639). Bezeichnet man diesen konstanten Koeffizienten oder das Maaß der rückwirkenden Festigkeit eines Materiales mit $\varkappa$; so hat man

$$P = \varkappa K.$$

Wenn die Fläche des Querschnittes K in Quadratzollen gegeben ist; so findet man den Werth von $\varkappa$ oder das Maaß der rückwirkenden Festigkeit eines Prismas von Einem Quadratzoll Querschnitt für verschiedene Materialien in einer diesem Werke angehängten Tabelle angegeben.

Relative Festigkeit.

§. 409. Die Bruchfläche eines gebogenen Stabes.

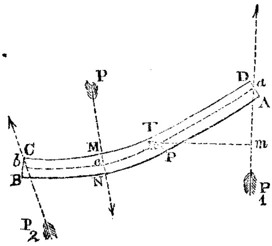
Wenn ein Stab unter der Wirkung einer seitwärts gerichteten Kraft gebogen wird; so wird das Material an der Seite, wo die Kraft wirkt, zusammengedrückt und an der entgegengesetzten Seite ausgedehnt. Die eingebildete Fläche, welche die zusammengedrückten Theile von den ausgedehnten trennt, heißt die neutrale Fläche (§. 356), und ihre Lage ist unter allen gewöhnlichen Fällen der Biegung in den früheren Paragraphen bestimmt. Unter relativer Festigkeit versteht man nun den Widerstand, welchen das Material des Stabes auf der Einen Seite der neutralen Fläche der Zusammendrückung und auf der anderen der Ausdehnung entgegensetzt, sodaß der Stab bricht, sobald die Wirkung der biegenden Kraft auf der Einen oder anderen Seite des Stabes größer ist, als Einer dieser beiden Widerstände.

Es leuchtet ein, daß die Bruchfläche derjenige Querschnitt des Stabes ist, in welchem derselbe im Augenblicke des erfolgenden Bruches am stärksten ausgedehnt ist, wenn er in Folge der Ausdehnung seines Materiales bricht, oder in welchem derselbe am stärksten zusammengedrückt ist, wenn er in Folge der Zusammendrückung seines Materiales bricht.

Bei einem prismatischen Stabe oder bei einem Stabe von gleichförmigen Dimensionen ist die Bruchfläche offenbar derjenige Querschnitt, in welchem die neutrale Fläche am stärksten gekrümmt ist, oder in welchem der Krümmungshalbmesser der neutralen Linie den kleinsten oder sein Umgekehrtes den größten Werth besitzt (vergleiche die Beziehung $\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{\varrho}{R}$ aus §. 357).

§. 410. Allgemeine Bedingungen für den Bruch eines Stabes durch Biegung.

PT sei die Bruchfläche eines Stabes, auf welchen verschiedene gegebene Kräfte angebracht sind, deren Resultante, wenn ihrer mehr wären, als drei, durch P_1, P_2 und P dargestellt seien. Man nehme an, der Stab sei im Begriffe in Folge der Ausdehnung seines Materiales im Punkte **P**, wo die Fiber



am stärksten ausgedehnt werden, zu brechen. Bezeichnet nun im Augenblicke des Bruches *acb* den Durchschnitt der neutralen Fläche, welche nach §. 356 von zylindrischer Form ist, mit der Biegungsebene und **R** eine auf der Biegungsebene perpendikular stehende Linie, welche also ganz in der neutralen Fläche liegt; so kann man diese Linie, welche für den Querschnitt **PT** die neutrale Axe bildet, die Berechnungsaxe des Stabes nenner. Nun sei

K die Fläche des Querschnittes **PT**,

ϱ der Abstand irgend eines Elementes $\triangle$**K** dieses Querschnittes von der Brechungsaxe **R**,

c_1 und c_2 resp. die Abstände **RP** und **RT**,

J der Werth des Trägheitsmomentes $\Sigma\varrho^2\triangle K$ des Querschnittes **PT** in Beziehung zu der Brechungsaxe **R**,

p_1 der Abstand der Richtung der Kraft P_1 vom Punkte **R**,

ε die Kraft in Pfunden, welche erforderlich ist, um einen Stab von einer Flächeneinheit Querschnitt bis zum Zerreißen auszudehnen, eine Kraft, welche der Brechungskoeffizient heißt *).

Wenn man annimmt, daß die Elastizität des Materiales in allen Fibern des Querschnittes **PT** bis zu dem Augenblicke des Bruches vollkommen bleibe; so werden sich die Widerstände, welche die einzelnen Fibern der Ausdehnung und auch der Zusammendrückung, wenn die Letztere im Vergleich zu der ursprünglichen Länge der Fibern gering ist (s. den Schluß von §. 348) entgegensetzen, direkt wie die Längenzunahmen oder Längenabnahmen derselben, also auch wie ihre Abstände ϱ von der Brechungsaxe

---

*) Die Erfahrung lehrt, daß der Werth von ε, wenn das Zerreißen in Folge einer Biegung erfolgt, nicht mit dem Maaße λ der absoluten Festigkeit übereinstimmt.

Wenn der Zoll die Längeneinheit bildet; so findet man den Werth des Brechungskoeffizienten ε oder die Kraft, welche erforderlich ist, um einen Stab von Einem Quadratzoll Querschnitt durch Biegung bis zum Zerreißen auszudehnen, für verschiedene Materialien in einer Tabelle am Ende dieses Werkes. Wählte man den Fuß zur Längeneinheit; so müßte in allen nachfolgenden Formeln 144 ε an die Stelle von ε gesetzt werden.

verhalten (vergl. die Beziehung $\frac{\delta x}{\triangle x} = \frac{\varrho}{\mathrm{R}}$ oder auch $\delta x = \frac{\triangle x}{\mathrm{R}} \varrho$ aus §. 357, $\triangle x$ und **R** für jeden Querschnitt konstant sind und δx die Verlängerung oder Verkürzung einer Fiber bezeichnet, welche um ϱ von der Axe **R** absteht).

Im Abstande $\mathrm{RP} = c_1$ von der Axe **R** ist nun der Widerstand, welcher sich der Ausdehnung des Materiales für die Flächeneinheit des Querschnittes im Augenblicke des Bruches entgegengesetzt, gleich ε; demnach ist der Elastatizitätswiderstand, welcher sich der Ausdehnung oder Zusammendrückung des Materiales in dem Abstande ϱ von jener Axe entgegensetzt (jenachdem man diesen Abstand nach der ausgedehnten oder zusammengedrückten Seite des Stabes mißt) für die Flächeneinheit gleich $\frac{\varrho}{c_1} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{c_1} \varrho$, und mithin für ein Flächenelement $\triangle \mathrm{K}$ des Querschnittes, welches in jenem Abstande von der Brechungsaxe liegt, gleich $\frac{\varepsilon}{c_1} \varrho \triangle \mathrm{K}$. Das Moment dieses Widerstandes in Beziehung zu der Axe **R** ist $\frac{\varepsilon}{c_1} \varrho^2 \triangle \mathrm{K}$ und die Summe der Momente aller Elastizitätswiderstände, welche sich in der Bruchfläche äußern, und welche sämmtlich eine Drehung des Theiles **AP** des Stabes nach derselben Seite zu bewirken streben, in Beziehung zu derselben Axe gleich $\frac{\varepsilon}{c_1} \Sigma \varrho^2 \triangle \mathrm{K}$ oder gleich $\frac{\varepsilon \mathrm{J}}{c_1}$, wenn man durch **J** das Trägheitsmoment des Querschnittes **PT** in Beziehung zu der Brechungsaxe darstellt. Da sich nun die vorstehenden elastischen Kräfte mit den Kräften im Gleichgewichte befinden, welche an einem jeden der Theile **APTD** oder **BPTC** des Stabes angebracht sind; so muß die Summe ihrer Momente in Beziehung zum Punkte **R** dem Momente von P_1 in Beziehung zu demselben Punkte gleich sei. Hiernach hat man

$$\mathrm{P}_1 p_1 = \frac{\varepsilon \mathrm{J}}{c_1} \quad \ldots \ldots (642).$$

Der Ausdruck $\frac{\varepsilon \mathrm{J}}{c_1}$ wird von den französischen Schriftstellern das **Brechungsmoment** genannt.

§. 411. Wenn die Biegung im Augenblicke des Bruches gering ist, und die Richtungen aller biegenden Kräfte auf der Oberfläche des Stabes perpendikular stehen; so geht die Brechungsaxe durch den Schwerpunkt des Querschnittes, und der Werth von c_1 ist bekannt. In den Fällen, wo diese Bedingungen nicht stattfinden, kann der Werth von c_1 durch die Prinzipien bestimmt werden, welche in den Paragraphen (357) und (383) entwickelt sind. Eine solche Bestimmung würde indessen die Theorie von dem Bruch der Stäbe immer noch in einer wichtigen Hinsicht unvollständig lassen. Es ist nämlich vorausgesetzt, daß die Elastizität des Materiales in einem jedem Punkte der Bruchfläche bis zu dem Augenblicke des Bruches vollkommen bleibe. Nun beobachtet man, daß in Folge der größeren Ausdehnung in der Nähe des Punktes **P** die Elastizitätsgränzen daselbst eher überschritten werden, als der Bruch erfolgt und als dieselben in anderen, der Brechungsaxe näher liegenden Punkten erreicht werden. Es kann demnach nicht angenommen werden, daß die Kräfte, welche sich in dem Gleichgewichtszustande des Stabes unmittelbar vor dem Bruche der Ausdehnung des Materiales entgegensetzen, in allen Punkten von **RP** genau so, wie ihre Abstände vom Punkte **R** variiren, und ebensowenig wird die Summe ihrer Momente genau durch den Ausdruck $\frac{\varepsilon J}{c_1}$ dargestellt werden. Außerdem hat diese Bemerkung auf die Bestimmung der Werthe von h und **R** (§. 357 und 383) und mithin auch auf den Werth von c_1 Einfluß.

Nur durch Versuche ist es möglich, den Einfluß zu ermitteln, welchen jene Abweichung von dem Gesetze der vollkommenen Elastizität auf die Bedingungen des Bruches durch Biegung äußert. Diese lehren nun aber in Hinsicht auf Stäbe von rechtwinkligem Querschnitte, daß der Fehler, welchen man begehen würde, wenn man in der Gleichung (642) für die Größe ε das Maaß der absoluten Festigkeit λ substituirte, dadurch korrigirt werden kann, daß man für c_1 einen Werth einführt, welcher für ein jedes gegebene Material in einem konstanten Verhältnisse zu dem Abstande des Punktes **P** von dem Schwerpunkte der Bruchfläche steht, sodaß, wenn c die Höhe des Querschnittes eines rechtwinkligen Stabes von irgend einem Materiale darstellt, jener Fehler dadurch verbessert wird, daß man $m\,\frac{c}{2}$ für c_1 an die Stelle setzt, worin m einen gewissen konstanten Faktor bezeichnet, welcher von der Natur des Materiales abhängt. Es leuchtet ein, daß jene Korrektion gleichbedeutend ist mit der Substitution von $c_1 = \frac{c}{2}$ und $\varepsilon = \frac{1}{m}\,\lambda$.

Eine solche Definition der Formel (642) ist allgemein gebräuchlich. Die durch Versuche bestimmten Werthe von ε für die wichtigsten in Konstruktionen vorkommenden Materialien finden sich in einer Tabelle am Ende dieses Werkes.

§. 412. Aus den Bemerkungen des vorstehenden Paragraphes geht hervor, daß es zwischen den Bedingungen des Bruches durch eine seitwärts gerichtete und durch eine nach der Länge des Stabes wirkende Kraft für ein jedes Material irgend eine direkte Beziehung geben werde. Eine solche Beziehung der einfachsten Art scheint kürzlich durch die Versuche von Hodgkinson, welche sich auch auf die Bedingungen des Bruches durch Zusammendrükkung erstrecken, aufgefunden zu sein. Dieselbe ist allen verschiedenen Arten von Material gemein, welche unter der folgenden großen Eintheilung begriffen sind — Bauholz, Gußeisen, Stein, Glas.

Die nachstehenden Tabellen enthalten die summarischen Resultate, welche aus Hodgkinsons Versuchen hervorgehen:

Bezeichnung des Materiales.	Angenommene Kraft zum Zerdrücken auf den Quadratzoll.	Mittlere Kraft zum Zerreißen auf den Quadratzoll.	Mittlere Kraft zum Zerbrechen eines Stabes von 1 Quadratzoll Querschnitt und 1 Fuß Länge.
Bauholz	1000	1900	85,1
Gußeißen	1000	158	19,8
Stein	1000	100	9,8
Glas	1000	123	10

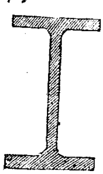
Die folgende Tabelle zeigt die Gleichförmigkeit dieses Verhältnisses für verschiedene Arten desselben Materiales:

Bezeichnung des Materiales.	Angenommene Kraft zum Zerdrücken auf den Quadratzoll.	Mittlere Kraft zum Zerreißen auf den Quadratzoll.	Mittlere Kraft zum Zerbrechen eines Stabes von 1 Quadratzoll Querschnitt und 1 Fuß Länge.
Schwarzer Marmor	1000	143	10,1
Italienischer Marmor	1000	84	10,6
Fließen von Rochdale	1000	104	9,9
Eisenstein	1000	100	—
Fließen v. Yorkshire	1000	—	9,5
Steine von Little Hulton bei Bolton	1000	70	8,8

§. 413. Form des Querschnittes von der größten Stärke.

Da die Ausdehnung und Zusammendrückung des Materiales in denjenigen Punkten am größten ist, welche von der neutralen Axe des Querschnittes am weitesten abstehen; so leuchtet ein, daß das Material nicht in allen Punkten des Querschnittes in denselben Augenblicke im Gränzzustande der Haltbarkeit sich befinden kann (§. 390), wofern nicht alles Material der ausgedehnten und ebenso alles Material der zusammengedrückten Seite *in demselben Abstande* von der neutralen Axe oder ein jedes in einer der neutraler Axe parallelen geometrischen Linie vereinigt wäre. Eine solche Vertheilung ist aber offenbar unmöglich, da dieselbe eine gänzliche Trennung der beiden Seiten des Stabes herbeiführen würde.

Die größte praktische Annäherung an diese Form des Querschnittes ist die in der seitstehenden Figur dargestellte, bei welcher



das Material in zwei dünnen, aber ziemlich breiten Rändern angehäuft ist, die durch eine schmale Rippe miteinander verbunden sind.

Da die Stärke eines Stabes in dem Widerstande besteht, welchen sein Material auf der Einen Seite der neutralen Axe der Zusammendrückung auf der anderen der Ausdehnung entgegengesetzt; so ist es (nach §. 390) offenbar eine zweite Bedingung für die Form von der größten Stärke irgend eines an Inhalt gegebenen Querschnittes, daß wenn der Stab in jenem Querschnitte im Begriffe ist, durch Ausdehnung auf der Einen Seite zu brechen, er auch im Begriff sei, durch Zusammendrückung auf der andern Seite zu brechen. Solange also die Vertheilung des Materiales nicht von der Art ist, daß die zusammengedrückte und ausgedehnte Seite zugleich nachgeben, ist die stärkste Form des Querschnittes noch nicht erreicht. Hieraus folgt, daß bei einem Querschnitte von der größten Stärke das meiste Material entweder an der zusammengedrückten oder an der ausgedehnten Seite angehäuft werden muß, jenachdem der Widerstand des Materiales gegen die Zusammendrückung oder gegen die Ausdehnung, d. i. jenachdem die rückwirkende oder die absolute Festigkeit des Materiales am geringsten ist. Wäre der Stab oder Balken z. B. aus Gußeisen, dessen absolute Festigkeit viel geringer ist, als seine rückwirkende Festigkeit; so müßte der größere Theil des Materiales an der ausgedehnten Seite vereinigt werden.

Hieraus geht hervor, daß die stärkste Form des Querschnittes eines gußeisernen Balkens diejenige ist, bei welcher das Material in zwei ungleichen, durch eine Rippe verbundenen Rändern angehäuft ist, von denen der größere an der ausgedehnten Seite liegt. Das Verhältniß dieser Ungleichheit der beiden Ränder müßte ferner von der Art sein, daß dadurch die Ungleichheit zwischen der absoluten und der rückwirkenden Festigkeit des Gußeisens ausgeglichen würde.

Hodgkinson, welchem wir diese Bemerkung verdanken, hat eine Reihe von Versuchen auf die Bestimmung jenes Verhältnisses gerichtet, durch welches die stärkste Form des Querschnittes erhalten wird.

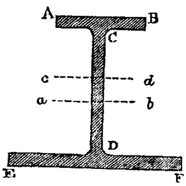
Die Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tabelle verzeichnet:

Nummer des Versuches	Verhältniß der beiden Ränder zueinander.	Fläche des ganzen Querschnittes in Quadratzollen (englisch)	Brechende Kraft für den Quadratzoll des Querschnittes in Pfunden. (englisch.)
1	1 : 1	2,82	2368
2	1 : 2	2,87	2567
3	1 : 4	3,02	2737
4	1 : 4,5	3,37	3183
5	1 : 5,5	5,0	3346
6	1 : 6,1	6,4	4075

Bei den ersten fünf Versuchen brach der Balken in Folge des Zerreißens des unteren Randes. Die Vertheilung, bei welcher beide Ränder zugleich nachgaben, d. i. die Vertheilung von der größten Stärke, war demnach bis dahin noch nicht erreicht. Zuletzt indessen, bei dem sechsten Versuche, brach der Balken in Folge der Zerdrückung des oberen Randes. Bei diesem Versuche war also der *obere* Rand der schwächere und der *untere* der stärkere, während bei dem vorhergehenden Versuche noch der *untere* Rand der schwächere war.

Hieraus folgt, daß für eine zwischen den letzten beiden liegende Form die Ränder eine gleiche Widerstandsfähigkeit resp. gegen das Zerdrücken und gegen das Zerreißen besaßen, und Dies war die stärkste Form des Querschnittes (§. 390).

Bei dieser stärksten Form enthielt der untere Rand sechsmal so viel Material, als der obere. Dieselbe ist in der seitstehenden Figur dargestellt.



Durch die beste Form von gußeisernen Balken war vor diesen Versuchen nie eine größere Stärke, als 2885 ℔ (englisch) für den Quadratzoll des Querschnittes erreicht. Es war mithin bei jener Form ein Gewinn von 1190 ℔ für den Quadratzoll des Querschnittes, oder von $\frac{2}{5}$ der Stärke des ganzen Balkens.

Man sieht auch, daß das Verhältniß 1 : 6 der Ränder von der stärksten Form nahezu dem Verhältnisse der absoluten zu der rückwirkenden Festigkeit des Gußeisens entspricht (vergl. die Tabelle am Ende dieses Werkes).

§. 414. Lage der Bruchfläche.

Nachdem die Bedingungen für den Bruch in Beziehung zu irgend einem Querschnitte des Stabes durch Gleichung (642) bestimmt sind, so leuchtet ein, daß der besondere Querschnitt, in welchem der Bruch wirklich erfolgen wird, der ist, für welchen die Gleichung (642) bei dem allmähligen Wachsen der Kraft $\mathbf{P}_1$ zuerst erfüllt wird, d. h. derjenige Querschnitt, für welchen der Werth des Ausdruckes

$$\frac{\mathrm{J}}{p_1\, c_1} \text{ am kleinsten } \ldots . (643)$$

ist.

Wenn der Stab über seine Länge gleichförmig belastet ist, und x den Abstand irgend eines Querschnittes von dem Ende darstellt, in welchem die Belastung beginnt, ferner μ die Belastung auf eine jede Längeneinheit bezeichnet; so ist das Moment der Belastung auf die Länge x des Stabes, welche in ihrem Schwerpunkte vereinigt gedacht werden kann, gleich $\frac{1}{2}\mu x^2$ (§. 373). Für $\mathbf{P}_1 p_1$ hat man daher hier $\frac{1}{2}\mu x^2$, und die Bruchfläche ist demnach derjenige Querschnitt, in welchem der kleinste Werth von μ die Gleichung $\frac{1}{2}\mu x^2 = \frac{\varepsilon \mathrm{J}}{c_1}$ erfüllt, oder für welchen der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{J}}{x^2\, c_1} \text{ am kleinsten } \ldots . (644)$$

ist.

Wenn auf den Stab außer einer stetigen Belastung noch andere einzelne Kräfte angebracht wären; so würde man nach Gleichung (642) für irgend einen Querschnitt die Gleichung

$$\mathbf{P}_1 p_1 + \mathbf{P}_2 p_2 + \mathbf{P}_3 p_3 + \ldots = \Sigma \mathbf{P} p = \frac{\varepsilon \mathrm{J}}{c_1}$$

haben, worin $\Sigma \mathbf{P} p$ die Summe der Momente aller auf den Stab wirkenden Kräfte, mit Einschluß der stetigen Belastung, bezeichnet, welche Letztere nicht nothwendig gleichförmig über die ganze Länge des Stabes vertheilt zu sein braucht. Die Lage der Bruchfläche wird nun im Allgemeinen durch die Bedingung bestimmt sein, daß die vorstehende Gleichung für die möglich kleinsten Werthe der Kräfte P_1, P_2, P_3... erfüllt werde. Man begreift jedoch leicht, daß wenn man diese Kräfte sämmtlich von null an wachsen läßt, zwischen den Werthen derselben immer eine gewisse Beziehung festgehalten werden muß, welche durch die Bedingung gegeben ist, daß jene Kräfte mit gewissen anderen Kräften, die gleichfalls an dem Stabe angebracht sind und gleichzeitig mit den vorstehenden variiren, fortwährend im Gleichgewichte seien. Mit anderen Worten, wenn sich für irgend einen absoluten Werth P_1', P_2', P_3' etc. jener Kräfte aus der Bedingung des Gleichgewichtes aller äußerlich an dem Stabe angebrachten Kräfte die Beziehung $P_1':P_2':P_3':\text{etc.} = m_1:m_2:m_3:\text{etc.}$ ergibt; so dürfen die Variationen dieser Kräfte immer nur so gedacht werden, daß für einen beliebigen anderen absoluten Werth P_1'', P_2'', P_3'' etc. derselben eine gleiche Beziehung $P_1'':P_2'':P_3'':\text{etc.} = m_1:m_2:m_3:\text{etc.}$ stattfinde. Eine solche Variation der Kräfte P_1, P_2, P_3 etc. wird offenbar dadurch erreicht, daß man für dieselben resp. die Werthe $m_1\Pi$, $m_2\Pi$, $m_3\Pi$, etc. substituirt, und alsdann die konstante Größe Π ganz nach Belieben wachsen läßt. Hierdurch geht die obige Gleichung in

$$m_1\Pi p_1 + m_2\Pi p_2 + \ldots = \Pi(m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots) = \Pi\Sigma m_1 p_1 = \frac{\varepsilon J}{c_1}$$

über, und es folgt, daß die Bruchfläche derjenige Querschnitt sei, für welchen der Ausdruck $\frac{\varepsilon J}{c_1 \Sigma m_1 p_1}$ der kleinste ist. Erwägt man nun, daß Π zwar eine nach Belieben zu wählende, aber doch für alle Querschnitte konstante Größe ist; so kann man den vorstehenden Ausdruck auch durch Π dividiren, und der daraus entstehende muß immer für die Bruchfläche der kleinste sein, welchen absoluten Werth man auch der Größe Π geben möge. Gibt man ihr aber denjenigen Werth, für welchen $m_1\Pi = P_1$, $m_2\Pi = P_2$ etc. wird; so folgt, daß die Bruchfläche derjenige Querschnitt ist, für welchen

$$\frac{J}{c_1 \Sigma P p} \text{ den kleinsten Werth } \ldots \quad (644^a)$$

hat. In diesem Ausdrucke steht P für den wirklichen Werth irgend einer im Augenblicke des Bruches auf den Stab angebrachten Kraft.

Wenn der Stab gleichförmige Dimensionen hat; so ist $\frac{J}{c_1}$ in der ganzen Ausdehnung des Stabes konstant, und die Bruchfläche ist einfach durch die Bedingung bestimmt, daß für dieselbe der Werth von $\frac{1}{\Sigma Pp}$ der kleinste sei. Auch erkennt man, mit Berücksichtigung der Gleichung (505), daß in diesem Falle die obige Bedingung Nichts weiter fordert, als daß der Krümmungshalbmesser R der neutralen Linie im Brechungspunkte der kleinste sei.

§. 415. Gestalt des Stabes von gleichförmiger Stärke.

Der Stab von gleichförmiger Stärke oder Haltbarkeit ist nach §. 390 derjenige, bei welchem ein jeder Querschnitt eine gleiche Geneigtheit zum Bruche besitzt oder zu gleicher Zeit durch Ein und dieselbe biegende Kraft in den Gränzzustand der Haltbarkeit versetzt wird. Bei einem solchen Stabe muß offenbar ein gegebener Werth von P_1 der Gleichung (642) für alle Querschnitte oder für alle korrespondirenden Werthe von J, c_1 und p_1 ein Genüge leisten, d. h. es muß in der ganzen Ausdehnung des Stabes

$$\frac{J}{p_1 c_1} \text{ konstant} = \frac{P_1}{\varepsilon} \quad \ldots . \ (645)$$

sein.

Wenn der Stab über seine Länge gleichförmig belastet ist (§. 373); so wird die vorstehende Bedingung

$$\frac{J}{x^2 c_1} \text{ konstant} = \frac{\frac{1}{2}\mu}{\varepsilon} \quad \ldots . \ (646)$$

für die ganze Ausdehnung des Stabes.

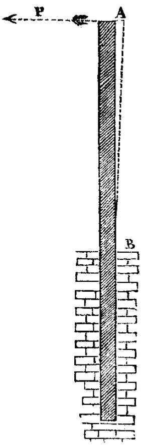
Bewirkten allgemein die beliebigen Kräfte P_1, P_2, P_3, ..., worunter stetige Belastungen und einzelnen Kräfte begriffen sind, die Biegung und dann den Bruch des Stabes; so müßte für Ein und dieselben gegebenen Werthe dieser Kräfte in der ganzen Ausdehnung des Stabes die Gleichung

$$\frac{\varepsilon J}{c_1} = \Sigma Pp \quad \ldots . \ (646^a)$$

erfüllt werden, damit der Stab überall einen gleichen Grad von Haltbarkeit besäße.

§. 416. **Das Eine Ende eines Balkens ist fest vermauert und an dem anderen Ende wirkt perpendikular zu der Länge des Balkens eine Kraft; es sollen die Bedingungen des Bruches angegeben werden.**

Wen x den Abstand irgend eines Querschnittes des Balkens von dem freien Ende A, an welchem die Kraft P wirkt, und a



seine ganze Länge **BA** darstellt; so wird für den Fall, daß der Querschnitt des Balkens überall derselbe ist, die Formel (643) im Punkte B, für welchen x am größten ist, den kleinsten Werth liefern. Der Bruch des Balkens wird demnach bei B erfolgen. Ist nun P die Kraft, welche den Bruch erzeugt; so hat man nach Gleichung (642), weil hier $p_1 = a$ ist,

$$P = \frac{\varepsilon J}{a c_1} \quad \ldots . \quad (647).$$

Wenn der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von der Breite b und der Höhe c ist (wobei c die Dimension parallel zur Richtung der Kraft P darstellt); so hat man $J = \frac{1}{12} b c^3$ (§. 362) und $c_1 = \frac{c}{2}$, mithin

$$P = \tfrac{1}{6} \varepsilon \frac{bc^2}{a} \quad \ldots . \quad (648).$$

Wenn der Balken ein voller Zylinder vom Halbmesser r ist; so hat man $J = \frac{1}{4} \pi r^4$ (§. 364) und $c_1 = r$, mithin

$$P = \tfrac{1}{4} \pi \varepsilon \frac{r^3}{a} \quad \ldots . \quad (649).$$

Wenn der Balken ein hohler Zylinder von den Halbmessern r_1 und r_2 ist; so hat man $J = \frac{1}{4}(r_1{}^4 - r_2{}^4)$ (§. 365), ein Ausdruck, welcher nach §. 86 auch auf die Form $J = \pi c r (r^2 + \frac{1}{4} c^2)$

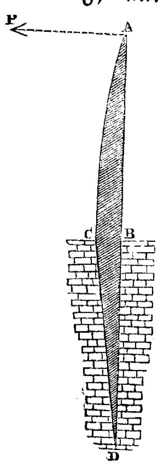
gebracht werden kann, worin r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1+r_2}{2}$ und c die Dicke (r_1-r_2) des hohlen Zylinders bezeichnet. Ferner hat man $c_1=r_1=r+\frac{1}{2}c$; mithin

$$P=\pi\,\varepsilon\frac{(r^2+\frac{1}{4}c^2)\,cr}{(r+\frac{1}{2}c)\,a}\;\ldots\ldots\;(650)$$

Es leuchtet ein, daß sich die vorstehenden Formeln auch auf den Fall beziehen, wo der Balken eine horizontale Lage hat, wenn man dabei das eigene Gewicht desselben vernachlässigt.

§ 417. **Die Form eines Balkens von der größten Stärke, welcher den Bedingungen des vorhergehenden Paragraphes unterworfen ist.**

Erstens. Der Querschnitt des Balkens sei überall rechtwinklig, und y bezeichen die Höhe des Querschnittes (in paralleler Richtung zur P) in einem Punkte, welcher um x von dem Ende A absteht; ferner sei b die konstante Breite des Querschnittes. In diesem Falle ist $J=\frac{1}{12}by^3$, $c_1=\frac{1}{2}y$ und demnach Gleichung (642) $P=\frac{\varepsilon J}{xc_1}=\frac{1}{6}\varepsilon b\,\frac{y^2}{x}$. Bezeichnet nun P den Werth der Kraft, deren Wirkung der Balken in allen Punkten nur eben ertragen kann; so ist die Form seines Längendurchschnittes ABC nach §. 415 durch die Gleichung $\frac{1}{6}\varepsilon b\frac{y^2}{x}=P$ oder durch

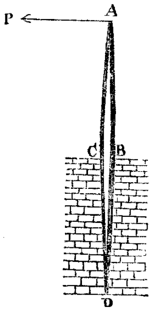


$$y^2=\frac{6P}{\varepsilon b}\,x\;\ldots\ldots\;(651)$$

dargestellt. Nimmt man daher die Eine Seite AB des Balkens parallel zu seiner Länge; so bildet die andere Seite AC eine Parabel, deren Axe AB ist und deren Scheitel in A liegt. (Es ist jedoch keineswegs nothwendig, daß die Seite AB gerade sei, wofern nur für den ganzen Längendurchschnitt die obige Gleichung besteht).

Der eingemauerte Theil des Balkens muß die in §. 419 beschriebene Form haben. Stützte sich dieser Theil, dessen Länge BD=BA vorausgesetzt wird, nicht in allen Punkten gegen festes Mauerwerk, sondern nur in dem Endpunkte D; so müßte dieser Theil offenbar dieselbe Form erhalten, wie der Theil BA.

Zweitens. Der Querschnitt des Balkens sei ein voller Kreis und y der Halbmesser desselben im Abstande x vom Endpunkte A.



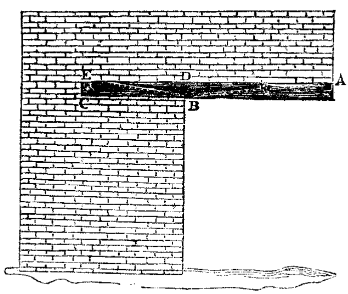
Alsdann ist $J = \frac{1}{4}\pi y^4$ und $c_1 = y$; mithin $P = \frac{1}{4}\pi\varepsilon\frac{y^3}{x}$, sodaß die geometrische Form des Längendurchschnittes durch die Gleichung

$$y^3 = \frac{4P}{\pi\varepsilon}x \quad \ldots \quad (652)$$

dargestellt ist, worin P die größe Kraft bezeichnet, welcher der Balken unterworfen werden soll.

§. 418. Bedingungen für den Bruch eines Balkens, welcher mit dem Einen Ende vermauert und auf seine ganze Länge gleichförmig belastet ist.

Bezeichnet man die Belastung für eine jede Längeneinheit des Balkens mit μ und beachtet, daß das Moment der auf der Länge x, von A aus, ruhenden Belastung in Beziehung zu der



neutralen Axe des daselbst befindlichen Querschnittes (§. 373) $= \frac{1}{2}\mu x^2$ ist; so folgt aus §. 414, daß die Bruchfläche des Balkens, wenn derselbe überall dieselben Dimensionen hat, in BD liegt. Substituirt man demnach $\frac{1}{2}\mu a^2$ für $P_1 p_1$ in Gleichung (642), und lös't dieselben für μ auf; so ergibt sich

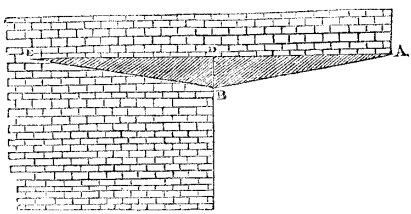
$$\mu = \frac{2\varepsilon J}{a^2 c_1} \quad \ldots \quad (653).$$

Durch diese Gleichung ist der Werth der gleichförmigen Belastung bestimmt, welche der Balken auf eine jede Längeneinheit zu ertragen fähig ist.

Für einen Balken mit rechtwinkligem Querschnitte von der Breite b und Höhe c wird dieser Ausdruck

$$\mu = \frac{\varepsilon b c^2}{3a^2} \quad \ldots \text{(654)}.$$

§. 419. Um die Form eines solchen Balkens von der größten Stärke bei einer gleichförmigen Breite b zu



bestimmen; so hat man nach §. 415 in die Gleichung (642) $\frac{1}{2}\mu x^2$ für $P_1 p_1$ $\frac{1}{12} b y^3$ für J und $\frac{1}{2} y$ für c_1 zu substituiren. Hieraus ergibt sich

$$y = x \sqrt{\frac{3\mu}{\varepsilon b}} \quad \ldots \text{(655)}.$$

Die Form von der größten Stärke entspricht also einem Längendurchschnitte **ADB**, welcher durch die gerade Verbindungslinie **AB** der beiden Punkte **A** und **B** begränzt wird. Die Höhe **DB** des Querschnittes an der Mauer wird erhalten, wenn man in der vorstehenden Gleichung $x = \overline{AD} = a$ setzt.

Der eingemauerte Theil des Balkens muß offenbar dieselbe Form haben, wie der Theil **DBA**.

§. 420. Wenn außer der gleichförmigen Belastung des Balkens an seinem Endpunkte **A** noch ein Gewicht **W** aufgehängt wäre; so würde man für irgend einen Querschnitt, welcher um x von **A** absteht, $\Sigma Pp = \frac{1}{2}\mu x^2 + Wx$ haben. Da nun für einen Balken von gleichförmigen Dimensionen der Werth der Formel (644^a)

$$\frac{J}{c_1 \Sigma P p} = \frac{J}{c_1 (\frac{1}{2}\mu x^2 + W x)}$$

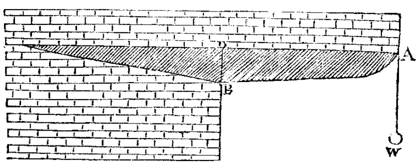
offenbar für $x = a$ der kleinste ist; so folgt, daß der Bruch im Querschnitte BD erfolgen wird. Substituirt man daher $\frac{1}{2}\mu a^2 + W a$ für $P_1 p_1$ in Gleichung (642); so erhält man

$$\frac{1}{2}\mu a + W = \frac{\varepsilon J}{a c_1} \quad \ldots . (655^a).$$

Gibt man in dieser Formel Einer der beiden Größen μ oder W einen beliebigen Werth; so erhält man daraus den Werth der anderen Größe, welche den Bruch eines Balkens von gleichförmigen Dimensionen und unter den obigen Umständen herbeiführen wird. Wenn der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe c ist; so hat man $J = \frac{1}{12} b c^3$, $c_1 = \frac{1}{2} c$ und die vorstehende Formel wird

$$\frac{1}{2}\mu a + W = \frac{\varepsilon b c^2}{6 a} \quad \ldots . (655^b).$$

Soll ein solcher Balken von konstanter Breite b durch die Wirkung einer gegebenen Belastung μ und eines gegebenen Ge-



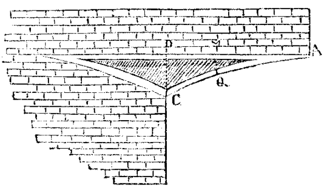
wichtes W in allen Punkten im Gränzustande der Haltbarkeit sich befinden; so hat man nach §. 415 in Gleichung (642) $P_1 p_1 = \frac{1}{2}\mu x^2 + W x$, $J = \frac{1}{12} b y^3$, $c_1 = \frac{1}{2} y$ zu substituiren. Dies ergibt

$$y^2 = \frac{3\mu}{\varepsilon b}\left(\frac{2W}{\mu} x + x^2\right) \quad \ldots . (656),$$

eine Gleichung, wodurch eine Hyperbel dargestellt wird, deren Scheitel in A liegt, und deren reelle Axe die gerade Begränzungslinie AD des Längenschnittes des Balkens ist. Es leuchtet übrigens hier, wie in allen ähnlichen Fällen ein, daß man der Einen der beiden Begränzungslinien AD und AB eine beliebige Krümmung geben kann, wofern nur die andere so genommen wird, daß die Höhe y des Querschnittes in dem Abstande x vom Endpunkte A die vorstehende Gleichung erfüllt.

§. 421. Die Form von der größten Stärke eines Balkens, welcher mit dem Einen Ende fest vermauert und über seine ganze Länge gleichförmig belastet ist, mit Rücksicht auf die Form seines Querschnittes und auf die Variation, welche die Dimensionen des Querschnittes erleiden müssen.

Die allgemeine Form des Querschnittes, welcher einem Balken von der größten Stärke angehört, muß offenbar die im §. 413 beschriebene sein. Behält man nun die Beziehungen aus §. 366 bei, setzt aber die Höhe c_3 der mittleren Rippe $=y$ und ihre Dicke $b_3=b$, sodaß $A_3=by$ ist; so hat man nach Gleichung (508)



$$J=\tfrac{1}{12}\left\{by+3\left[\frac{4A_1A_2+(A_1+A_2)by}{A_1+A_2+by}\right]\right\}y^2 .$$

Ferner, wenn man mit c_1 den Abstand des Schwerpunktes des ganzen Querschnittes von der unteren Kante bezeichnet, und näherungsweise o, $\frac{1}{2}y$ und y für die Abstände der Schwerpunkte der Rechtecke A_2, A_3, A_1 von jener Kante nimmt,

$c_1(A_1+A_2+A_3)=\frac{1}{2}yA_3+yA_1$ oder

$c_1(A_1+A_2+by)=\frac{1}{2}cy^2+A_1y$; mithin $c_1=\dfrac{\frac{1}{2}cy^2+A_1y}{A_1+A_2+by}$.

Substituirt man diese Werthe für J und c_1 und den Werth $\frac{1}{2}\mu x^2$ für P_1p_1 in Gleichung (642); so erhält man nach gehöriger Reduktion für die Beziehung, welche zwischen der Höhe y der Rippe in irgend einem Querschnitte und dem Abstande x dieses Querschnittes vom Punkte A stattfinden muß, damit sich der Balken überall im Gränzzustande der Haltbarkeit befinde (§. 415)

$$\frac{3\mu}{\varepsilon} x^2 = \left[\frac{12A_1A_2 + 4(A_1 + A_2)by + b^2y^2}{2A_1 + by}\right] y \quad \ldots \quad (657),$$

oder wenn man annimmt, daß die Fläche des unteren Randes $n$mal so groß sei, als die des oberen, daß also $A_2 = nA_1$,

$$\frac{3\mu}{\varepsilon} x^2 = \left[\frac{12nA_1^2 + 4(1+n)A_1 by + b^2y^2}{2A_1 + by}\right] y.$$

Wenn die Fläche by der Rippe im Vergleich zu der Fläche der beiden Ränder sehr gering wäre; so würde man bei Vernachlässigung aller in by multiplizirter Glieder der vorstehenden Gleichung näherungsweise

$$y = \frac{\mu}{2n\varepsilon A_1} x^2 \quad \ldots \quad (658)$$

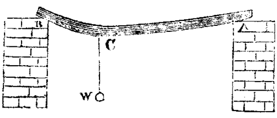
haben, wodurch eine Parabel dargestellt wird, deren Scheitel in A liegt und deren Axe vertikal steht.

Beständе der Balken aus Gußeisen; so geht aus den Versuchen von Hodgkinson (§. 413) hervor, daß man $n = 6$ zu setzen hätte.

§. 422. **Ein Balken von gleichförmigem Querschnitte ist an seinen beiden Ende unterstützt und in irgend einem zwischenliegenden Punkte belastet; es sollen die Bedingungen für den Bruch angegeben werden.**

Es sei

a die Länge AB des Balkens,
a_1 der Abstand AC, a_2 der Abstand BC,
W das in C aufgehängte Gewicht.



Bezeichnet man den Widerstand des Unterstützungspunktes A mit P_1; so hat man $P_1 = \frac{Wa_2}{a}$.

Um die Lage der Bruchfläche zu erfahren; so würde man, wenn dieselbe in dem Theile AC und in einem Abstande x vom Endpunkte A läge $\Sigma Pp = P_1 x = \frac{Wa_2 x}{a}$ haben, und dieselbe würde nach Gleichung (644^a) derjenige Querschnitt des Balkens sein, für welchen $\frac{J}{c_1 \frac{W_2 a x}{a}}$ den kleinsten Werth hätte. Der kleinste Werth dieses Ausdruckes entspricht offenbar dem größten von x; sobald aber $x > a_1$ angenommen, und demnach die Bruchfläche in dem Theile CB des Balkens gesucht wird, hat man wegen des bei C hinzukommenden Gewichtes W, welches in entgegengesetzter Richtung von P_1 wirkt, $\Sigma Pp = P_1 x - (x - a_1) W$ $= \frac{W a_2}{a} x - (x - a_1) W = \frac{W}{a} [a a_1 - (a - a_2) x] = \frac{W a_1}{a} (a - x)$ Die Bedingung für die Lage der Bruchfläche in dem Theile CB ist demnach

$$\frac{J}{c_1 \frac{W a_1}{a} (a - x)} \text{ ein Minimum.}$$

Da nun diese Bedingung fordert, daß der Abstand x vom Endpunkte A so klein wie möglich sei, während derselbe aber wegen der ersteren Bedingung nicht kleiner, als a_1 werden darf; so folgt, daß die Bruchfläche im Aufhängepunkte C des Gewichtes W liegt.

Substituirt man demnach $P_1 a_1 = \frac{W a_1 a_2}{a}$ für $P_1 p_1$ in Gleichung (642); so kommt $\frac{W a_1 a_2}{a} = \frac{\varepsilon J}{c_1}$ oder

$$W = \frac{\varepsilon J a}{a_1 a_2 c_1} \dots (659)$$

Wenn der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von der Breite b und der Höhe c ist; so hat man $J = \frac{1}{12} b c^3$ und $c_1 = \frac{1}{2} c$; also

$$W = \frac{\varepsilon}{6} \frac{b c^2 a}{a_1 a_2} \dots (660)$$

Wäre dabei das Gewicht W in der Mitte aufgehängt; so würde man $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} a$, und demnach

$$W = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{b c^2}{a} \dots (661)$$

haben.

Wenn der Balken ein voller Zylinder von dem Halbmesser r ist; so hat man $J = \frac{1}{4}\pi r^4$, $c_1 = r$ und demnach

$$W = \frac{\pi \varepsilon}{4} \frac{a r^3}{a_1 a_2} \ldots . (662)$$

Wenn der Balken ein hohler Zylinder ist, dessen mittlerer Halbmesser $= r$ und dessen Dicke $= c$; so hat man $J = \pi c r (r^2 + \frac{1}{4} c^2)$, $c_1 = r + \frac{1}{2} c$, und mithin

$$W = \pi \varepsilon \frac{a c r (r^2 + \frac{1}{4} c^2)}{a_1 a_2 (r + \frac{1}{2} c)} \ldots . (663)$$

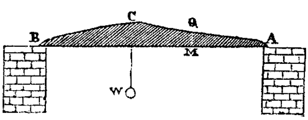
Wenn der Querschnitt des Balkens die in §. 366 dargestellte Figur hat; so ist für J der Werth aus Gleichung (508) zu substituiren. Der Abstand c_1 des Schwerpunktes des ganzen Querschnittes A ist sehr nahe durch die Gleichung $A c_1 = \frac{1}{2} c_3 A_3 + c_3 A_1$ bestimmt. Substituirt man demnach in Gleichung (659) für J den Werth der Gleichung (508) und für c_1 den Werth $\frac{(\frac{1}{2} A_3 + A_1) c_3}{A}$; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$W = \frac{\varepsilon a c}{6 a_1 a_2} \left[\frac{12 A_1 A_2 + 4 (A_1 + A_2) A_3 + A_3{}^2}{2 A_1 + A_3} \right], \ldots (664)$$

worin A_1 und A_2, resp. die Flächen des oberen und unteren Randes, A_3 die der Rippe und c die Höhe der Letzteren darstellt.

§. 423. **Ein Balken ist an seinen beiden Enden unterstützt und in irgend einem zwischenliegenden Punkte belastet; sein Querschnitt hat irgend eine bestimmte geometrische Form, deren Dimensionen aber veränderlich sind: es soll das Gesetz dieser Veränderung angegeben werden, sodaß die Stärke des Balkens ein Maximum wird.**

Wenn W die Last bezeichnet, welche den Bruch herbeiführt,



und a_1, a_2 die Abstände ihres Aufhängepunktes C von A und B darstellen; so ist der Widerstand des Stützpunktes A $P_1 = \frac{W a_2}{a}$. Bezeichnet man ferner, wie früher, mit x den horizontalen Abstand irgend eines Querschnittes MQ vom Stützpunkte A, mit J das Trägheitsmoment dieses Querschnittes in Beziehung zu der neutralen Axe desselben und mit c_1 den Abstand seines Schwerpunktes von dem Punkte, in welchem der Bruch erfolgt (d. i. hier von dem untersten Punkte des Querschnittes); so muß nach Gleichung (642) und §. 415 für die ganze Ausdehnung des Balkens die Beziehung

$$P_1 x = \frac{W a_2}{a} x = \frac{\varepsilon J}{c_1} \ldots. (665)$$

erfüllt werden. Ist nun

erstens der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von konstanter Breite b; so sei dessen Höhe im Abstande x von A gleich y. Alsdann hat man $J = \frac{1}{12} b y^3$, $c_1 = \frac{1}{2} y$, und mithin nach der vorstehenden Gleichung

$$y^2 = \frac{6 W a_2}{\varepsilon a b} x \ldots. (666)$$

Nimmt man daher die untere Fläche des Balkens als gerade an; so bildet die Kurve AC eine Parabel, deren Scheitel in A liegt und deren Axe horizontal ist. In ähnlicher Weise ist die Kurve BC eine Parabel, deren Gleichung mit der obigen übereinstimmt, wenn man darin a_1 an die Stelle von a_2 setzt.

Zweitens. Wenn der Querschnitt ein voller Kreis ist; so sei der Halbmesser desselben in einem Abstande x von A gleich y. In diesem Falle hat man $J = \frac{1}{4} \pi y^4$, $c_1 = y$, und die Gleichung (665) ergibt

$$y^3 = \frac{4 W a_2}{\pi \varepsilon a} x \ldots. (667)$$

Drittens. Wenn der Querschnitt ein konzentrischer Ring von der konstanten Breite c ist, und man bezeichnet den mittleren Halbmesser desselben in dem Abstande x von A mit y; so hat man $J = \pi c y (y^2 + \frac{1}{4} c^2)$, $c_1 = y + \frac{1}{2} c$, und mithin nach Gleichung (665)

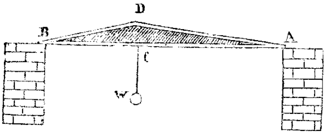
$$x = \frac{\pi \varepsilon a c y}{2 W a_2} \left(\frac{4 y^2 + c^2}{2 y + c} \right) \ldots. (668)$$

§. 424. Der an beiden Enden unterstützte und in einem gegebenen Punkte belastete Balken von der größten absoluten Stärke.

Der Querschnitt des Balkens habe die Form von der größten Stärke aus §. 413. Substituirt man in Gleichung (665) für $\frac{J}{c_1}$ denselben Werth, wie vorhin in Gleichung (657); so erhält man

$$\frac{6Wa_2}{\varepsilon a}x = \left[\frac{12A_1A_2 + 4(A_1+A_2)by + b^2y^2}{2A_1 + by}\right]y \dots (669)$$

Wenn der Querschnitt by der Rippe im Vergleich zu den Querschnitten der Ränder überall sehr gering ist, und wenn $A_2 = nA_1$ gesetzt wird; so reduzirt sich die vorstehende Gleichung auf



$$y = \frac{Wa_2}{n\varepsilon aA_1}x \dots (670)$$

und stellt alsdann eine gerade Linie dar, welche durch den Unterstützungspunkt A geht und unter einem Winkel gegen den Horizont geneigt ist, dessen Tangente $\frac{Wa_2}{n\varepsilon aA_1}$ ist. Wenn man für n den geeigneten Werth substituirt (§. 413); so kann diese Form als eine Annäherung an die wahre Form des Balkens von der größten absoluten Stärke angesehen werden. Für Gußeisen scheint der Werth von n nach den Versuchen von Hodgkinson gleich 6 zu sein. A_2 stellt alsdann immer den ausgedehnten Rand dar, welcher in dem vorliegenden Falle der untere ist.

Die Höhe CD der Rippe im Aufhängepunkte der Last ergibt sich aus Gleichung (670), wenn man darin $x = a_1$ setzt. Man hat also

$$\overline{CD} = \frac{Wa_1a_2}{n\varepsilon aA_1} \dots (671)$$

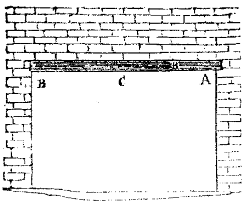
§. 425. Wenn man statt der Höhe der Rippe die Breite der Ränder in der Weise variiren lassen wollte, daß dadurch die Bedingung von gleichförmiger Haltbarkeit des §s. 390 erfüllt würde; so sei y die veränderliche Breite des oberen Randes, d seine konstante Höhe, c die konstante Höhe der Rippe. Nimmt man nun an, der Querschnitt des unteren Randes sei immer n mal größer, als der des oberen; so hat man $A_1 = dy$, $A_2 = nA_1 = ndy$. Führt man diese Werthe in den Ausdruck (508) für das Trägheitsmoment des Querschnittes ein und vernachlässigt dabei die Größe A_3 gegen A_1 und A_2, bestimmt ferner den Werth von c_1 in Gleichung (665) durch die Beziehung $c_1(1+n) = c$, indem man denselben näherungsweise gleich dem Abstande des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der beiden Ränder von der unteren Kante des Querschnittes setzt; so ergibt sich durch Substitution in Gleichung (665)

$$y = \frac{W a_2}{n \varepsilon a c d} x \ldots . (672)$$

Die Oberfläche eines jeden Randes bildet hiernach ein Viereck, dessen größte Breite für den oberen Rand aus der vorstehenden Gleichung erhalten wird, wenn man darin $x = a_1$ setzt. Bezeichnet man dieselbe mit b, ferner die größte Breite des unteren Randes mit b_2 und die Höhe desselben mit d_2; so hat man zur Bestimmung des Werthes von b_2 die Beziehung $b_2 d_2 = nbd$, also $b_2 = \frac{nbd}{d_2}$.

§. 426. Ein Balken ist an beiden Enden unterstützt und über seine ganze Länge gleichförmig belastet; es sollen 1) die Bedingungen für den Bruch angegeben werden, wenn sein Querschnitt überall gleichförmig ist, 2) die Form des Balkens von der größten Stärke, wenn sein Querschnitt überall rechtwinklig ist, 3) die Form von der größten Stärke mit Berücksichtigung der Form und der Veränderlichkeit des Querschnittes.

1) Wenn die Form des Querschnittes gleichförmig ist, und a die Länge des Balkens, ferner μ die Belastung desselben auf die Längeneinheit bezeichnet; so leuchtet ein, daß der Widerstand des Unterstützungspunktes A gleich $\frac{1}{2}\mu a$ sein wird. Um nun die Lage der Bruchfläche zu bestimmen; so nehme man die-



selbe in dem Abstande $AR = x$ vom Punkte A an. Die den Bruch hervorbringenden Kräfte sind alsdann der Widerstand $\frac{1}{2}\mu a$ in vertikaler Richtung nach oben und im Abstande x von der Brechungsaxe R und die Belastung μx in vertikaler Richtung nach unten und in dem Abstande $\frac{1}{2}x$ von derselben Axe. Setzt man demnach in dem Ausdrucke (644a) $\Sigma Pp = \frac{1}{2}\mu a x - \frac{1}{2}\mu x^2$; so ist die Bedingung für den Abstand x der Bruchfläche vom Unterstützungspunkte A

$$\frac{J}{\frac{1}{2}c_1\mu(ax - x^2)} \text{ ein Minimum}$$

oder

$$ax - x^2 \text{ ein Maximum.}$$

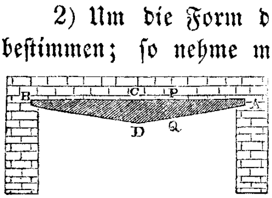
Da die letztere Bedingung für $x = \frac{a}{2}$ erfüllt wird; so folgt, daß der Bruch in der Mitte des Balkens erfolgt. Substituirt man demnach in Gleichung (642) für $P_1 p_1$ den Werth $\frac{1}{2}\mu a . \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\mu a^2$; so erhält man

$$\mu = \frac{8\varepsilon J}{a^2 c_1}, \ldots (673)$$

worin μ die Belastung für die Längeneinheit darstellt, welche den Bruch herbeiführt. In dem Falle eines rechtwinkligen Querschnittes von der Breite b und Höhe c hat man $J = \frac{1}{12}bc^3$ und $c_1 = \frac{1}{2}c$; mithin

$$\mu = \frac{4\varepsilon}{3}\frac{bc^2}{a^2} \ldots (674)$$

2) Um die Form des Balkens von der größten Stärke zu bestimmen; so nehme man an, die Breite bleibe konstant gleich



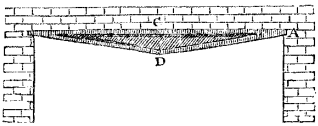
b und y sei die Höhe PQ des Querschnittes in dem Abstande $AP = x$ von dem Unterstützungspunkte A. Alsdann hat man $J = \frac{1}{12}by^3$, $c_1 = \frac{1}{2}y$ und

$P_1 p_1 = \frac{1}{2}\mu a x - \frac{1}{2}\mu x^2 = \frac{1}{2}\mu(ax - x^2)$; mithin nach Gleichung (642) $\frac{1}{2}\mu(ax - x^2) = \frac{1}{6}\varepsilon b y^2$ oder

$$y^2 = \frac{3\mu}{\varepsilon b}(ax - x^2), \; . \; . \; . \; . \; (675)$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Scheitel in **A** und deren Mittelpunkt in **C** liegt, wenn man die Eine Begränzungslinie des Längedurchschnittes horizontal annimmt.

3) Zur Bestimmung des Balkens von der größten absoluten Stärke behalte man die Bezeichnungen und Abkürzungen des §s. 424 bei. Da hier $P_1 p_1 = \frac{1}{2}\mu x(a - x)$ ist; ergibt die Gleichung (642)



$$\frac{1}{2}\mu x(a - x) = \frac{\varepsilon}{6}\left[\frac{12A_1 A + 4(A_1 + A_2)by + b^2 y^2}{2A_1 + by}\right]y, \; . \; . \; (676)$$

oder für die Voraussetzung, daß der Querschnitt by der Rippe im Vergleich zu den Querschnitten der Ränder sehr klein sei,

$$x(a - x) = \frac{2n\varepsilon A_1}{\mu}y, \; . \; . \; . \; . \; (677)$$

worin $nA_1 = A_2$ gesetzt ist. Durch diese Gleichung wird eine Parabel dargestellt, deren Axe vertikal steht, und durch die Mitte des Balkens geht, deren Parameter $\frac{2n\varepsilon A_1}{\mu}$ ist, und deren Scheitel **D** durch die Formel

$$y = \overline{CD} = \frac{\mu a^2}{8n\varepsilon A_1} \; . \; . \; . \; . \; (678)$$

bestimmt ist, wenn man in Gleichung (677) $x = \frac{a}{2}$ setzt.

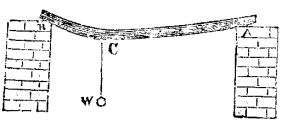
Wenn man die Rippe überall von derselben Höhe anfertigen und die Breiten der Ränder so variiren lassen wollte, daß dadurch der Balken überall dieselbe Stärke erhielte; so würde man zur Bestimmung der Breite y des oberen Randes in dem Abstande x von dem Unterstützungspunkte **A** unter Beibehaltung sämmtlicher Bezeichnungen und Abkürzungen des §s. 425 die Gleichung

$$x(a-x)=\frac{2n\varepsilon cd}{\mu}y \quad \ldots \quad (679)$$

haben. Die Breite b des oberen Randes in der Mitte des Balkens ist der Werth von y für $x=\frac{a}{2}$, also $b=\frac{\mu a^2}{8n\varepsilon cd}$. Die Breite b_2 des unteren Randes in der Mitte des Balkens ist hier, wie in §. 425, durch die Beziehung $b_2=\frac{nbd}{d_2}$ bestimmt.

§. 426^a. **Ein Balken ist an beiden Enden unterstützt und über seine ganze Länge gleichförmig belastet, außerdem ist in einem zwischenliegenden Punkte ein Gewicht aufgehängt; es sollen die Bedingungen für den Bruch angegeben werden, wenn der Querschnitt des Balkens konstant ist.**

Wenn
a die ganze Länge **AB** des Balkens,
a_1 den Abstand **AC**, a_2 den Abstand **BC**,
μ die Belastung des Balkens auf die Längeneinheit und
W das in **C** aufgehängte Gewicht bezeichnet;
so sei $a_1 > a_2$. Stellt nun P_1 den Widerstand des Unterstützungspunktes **A** dar; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente für die Bedingung, daß die Belastung μa und das Gewicht **W** mit den Widerständen der festen Punkte **A** und **B** im Gleichgewichte seien $P_1 a=\frac{1}{2}\mu a^2+W a_2$, also $P_1=\frac{1}{2}\mu a+W\frac{a_2}{a}$. Es ist jetzt zu untersuchen, ob die Bruchfläche in dem Theile **AC** oder **BC** des Balkens liege. Angenommen, sie liege in **AC** und zwar in dem Abstande x_1 von **A**; alsdann hat man für die Summen der Momente der auf die Länge x_1 angebrachten Kraft P_1 in vertikaler Richtung nach oben und der Belastung μx_1 in vertikaler Richtung nach unten in Beziehung zu der neutralen Axe der angenommenen Bruchfläche



$$\Sigma Pp=P_1x_1-\tfrac{1}{2}\mu x_1{}^2=\tfrac{1}{2}\mu a x_1+W\frac{a_2}{a}x_1-\tfrac{1}{2}\mu x_1{}^2.$$

Nach Gleichung (644^a) ist demnach der Werth von x_1, welcher die wirkliche Lage der Bruchfläche bestimmt, der Bedingung unterworfen, daß

$$\frac{J}{c_1\left(\frac{1}{2}\mu\, a\, x_1 + \frac{W a_2}{a} x_1 - \frac{1}{2}\mu x_1{}^2\right)} \text{ ein Minimum}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\mu\, a\, x_1 + \frac{W a_2}{a} x_1 - \tfrac{1}{2}\mu\, x_1{}^2 \text{ ein Maximum}$$

sei. Differenziirt man den letzteren Ausdruck in Beziehung zu x_1 und setzt den Differenzialkoeffizienten gleich null; so erhält man für den gesuchten Werth von x_1

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\,\frac{a_2}{a}.$$

Ist nun dieser Abstand x_1 vom Unterstützungspunkte A $<$ oder $= a_1$; so wird in demselben die Bruchfläche liegen. Fände man aber, daß derselbe $> a_1$; so würde der vorstehende Ausdruck nicht mehr die wahre Lage der Bruchfläche bestimmen, weil dieselbe alsdann in dem Theile **BC** des Balkens zu suchen wäre, für welchen die obigen Beziehungen keine Gültigkeit haben.

Um jetzt zu untersuchen, ob für den Fall, daß $x_1 \geqq a_1$ gefunden würde, die Bruchfläche in dem Theile **BC** liegen könnte; so leuchtet ein, daß der eventuelle Abstand x_2 der Bruchfläche von dem Unterstützungspunkte **B** aus dem vorstehenden Ausdrucke für x_1 erhalten wird, wenn man darin a_1 an die Stelle von a_2 setzt. Wäre es also möglich, daß die Bruchfläche in dem Theile **BC** läge; so müßte

$$x_2 = \tfrac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\,\frac{a_1}{a}$$

sein. Nun ist aber vorausgesetzt, daß $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\,\frac{a_2}{a} \geqq a_1$ sei; demnach muß

$$\frac{W}{\mu}\,\frac{a_2}{a} \geqq a_1 - \tfrac{1}{2}a, \text{ folglich auch}$$

$$\frac{W}{\mu}\frac{a_1}{a} \geqq \frac{(a_1 - \frac{1}{2}a)a_1}{a_2} \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\frac{a_1}{a} = x_2 \geqq \tfrac{1}{2}a + \frac{(a_1 - \frac{1}{2}a)a_1}{a_2}$$

sein. Wenn aber $x_2 \geqq \frac{1}{2}a + \frac{(a_1 - \frac{1}{2}a)\, a_1}{a_2}$ ist; so folgt, daß noch weit eher $x_2 > a_2$ sein muß. Hieraus geht endlich hervor, daß die Bruchfläche immer in dem längeren Theile AC des Balkens und zwar in dem Abstande

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\frac{a_2}{a}$$

vom Punkte A liegen wird, wenn dieser Werth von $x_1 < a_1$ ist, oder in dem Aufhängepunkte C des Gewichtes W selbst, wenn dieser Werth von $x_1 >$ oder $= a_1$ ist. Wenn das Gewicht W die Belastung μa sehr übertrifft; so wird in der Regel $x_1 > a_1$ sein und der Bruch wird in C erfolgen. Wenn die Belastung μa im Verhältnisse zu dem Gewichte W sehr groß ist; so wird $x_1 < a_1$ sein, und der Bruch erfolgt alsdann in dem Abstande $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{W a_2}{\mu a}$ von A: man erkennt jedoch, daß, wie groß auch die Belastung auf die Längeneinheit sein möge, der Werth von x_1 immer $> \frac{1}{2}a$ sein und demnach der Bruch immer zwischen der Mitte des Balkens und dem Aufhängepunkte C erfolgen wird. Wenn der letztere Punkt mit der Mitte des Balkens zusammenfällt, oder wenn $a_1 = \frac{1}{2}a$ ist; so wird x_1 immer $\geqq \frac{1}{2}a$ d. i. $\geqq a_1$ sein, und in diesem Falle wird daher der Bruch immer in der Mitte des Balkens erfolgen.

Da der obige Werth von x_1 von denjenigen Werthen des Gewichtes W und der Belastung μ auf die Längeneinheit abhängt, welche groß genug sind, um den Bruch des Balkens herbeizuführen, diese Werthe aber im voraus nicht bekannt sind; so sieht man, daß die Lage der Bruchfläche aus den gegebenen Verhältnissen der Abstände a_1 und a_2 nicht a priori vollständig bestimmt werden kann, es sei denn, daß $a_1 = \frac{1}{2}a$ wäre, in welchem Falle der Bruch immer in der Mitte des Balkens erfolgt. Wenn daher die Eine der beiden Größen W oder μ z. B. μ gegeben ist, und der Werth des Gewichtes W unter der Bedingung gesucht wird, daß durch die Zusammenwirkung desselben mit der stetigen Belastung der Bruch des Balkens erfolge; so hat man den obigen Werth von x_1 in den vorhergehenden Ausdruck für ΣPp zu substituiren, alsdann den erhaltenen Werth von ΣPp in Gleichung (642) an die Stelle von $P_1 p_1$ zu setzen und dieselbe für W aufzulösen. Der für W gefundene Werth, in den obigen Ausdruck für x_1 gesetzt, müßte dann der Bedingung $x_1 < a_1$ ein Genüge leisten. Thäte er Dies nicht; so wäre die Voraussetzung, daß der Bruch zwischen den Punkten A und C erfolgte, irrig gewesen, der Balken könnte in diesem Falle nur im Punkte C brechen, und man hätte die Rechnung unter der Annahme $x_1 = a_1$ nochmals zu wiederholen.

Setzt man daher für den Fall, daß $\frac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\frac{a_2}{a} < a_1$ wäre, x_1 gleich diesem Werthe, und für den Fall, daß $\frac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\frac{a_2}{a} \geqq a_1$ wäre, $x_1 = a_1$; so ergeben sich nach der Einführung des entsprechenden Werthes von ΣPp in Gleichung (642) und nach gehöriger Reduktion folgende Beziehungen, zwischen den Beträgen der Kräfte μ und W und der Lage der Bruchfläche, von denen je drei immer zu gleicher Zeit stattfinden müssen:

wenn die stetige Belastung überwiegend ist und der Bruch zwischen der Mitte des Balkens und dem Punkte C erfolgt,

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{W a_2}{\mu a}, \\ \frac{1}{2}a + \frac{W}{\mu}\frac{a_2}{a} < a_1 \text{ oder } W < \frac{\mu a (a_1 - \frac{1}{2}a)}{a_2} \\ \frac{1}{2}\mu\left(\frac{1}{2}a + \frac{W a_2}{\mu a}\right)^2 = \frac{\varepsilon J}{c_1}, \end{array}\right\} \ldots (679a)$$

wenn das Gewicht W eine vorherrschende Wirkung äußert und der Bruch im Punkte C erfolgt,

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = a_1 \\ \frac{1}{2}a + \frac{W a_2}{\mu a} \geqq a_1 \text{ oder } W \geqq \frac{\mu a (a_1 - \frac{1}{2}a)}{a_2} \\ \frac{1}{2}\mu a + W = \frac{\varepsilon J}{c_1}\frac{a}{a_1 a_2}. \end{array}\right\} \ldots (679b)$$

Sobald das Gewicht W in der Mitte des Balkens aufgehängt, also $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$ ist, hat man immer $W > \frac{\mu a(a_1 - \frac{1}{2}a)}{a_2} > 0$; also $x_1 = a_1$ und demnach wegen der letzteren der vorstehenden Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}\mu a + W = \frac{4 \varepsilon J}{a c_1}, \ldots . (679^c)$$

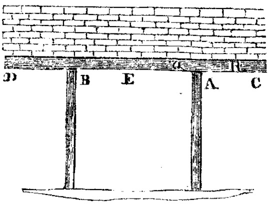
und wenn der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von der Breite b und der Höhe c ist, sodaß man $J = \frac{1}{12} b c^3$, $e_1 = \frac{1}{2} c$ hat,

$$\tfrac{1}{2}\mu a + W = \tfrac{2}{3}\varepsilon \frac{b c^2}{a} \ldots . (679^d)$$

Durch diese Gleichungen ist die gegenseitige Beziehung gegeben, welche zwischen der Belastung μ auf die Längeneinheit und dem in der Mitte des Balkens aufgehängten Gewichte W bestehen muß, damit durch die Zusammenwirkung Beider der Bruch des Balkens erfolge.

§. 427. **Ein rechtwinkliger Balken von konstantem Querschnitte ist über seine ganze Länge gleichförmig belastet und in zwei von seinen Enden gleich weit abstehenden Punkten unterstützt; es sollen die Bedingungen für den Bruch angegeben werden.**

Aus der Formel (644) folgt, daß die Bruchfläche des Theiles CA des Balkens bei A liegt, und daß demnach die Bedingungen des Bruches für diesen Theil nach §. 418 durch die Gleichung



$$\mu_1 = \frac{\varepsilon b c^2}{3 a_1^2} \ldots . (680)$$

bestimmt sind, worin μ_1 die Belastung auf die Längeneinheit, b die Breite, c die Höhe des Querschnittes und a_1 die Länge des Balkentheiles AC bezeichnet.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das in §. 426 angewandte, folgt, daß die Bruchfläche des Theiles AB in der

Mitte E liegt. Bezeichnet man jetzt die Belastung für eine jede Längeneinheit des Balkens CD, welche einen Bruch des mittleren Theiles AB herbeiführen würde, mit μ_2 und die ganze Länge CD des Balkens mit a; so ist der Widerstand einer jeden Stütze $=\frac{1}{2}\mu_2 a$, und man hat daher für die Summe der Momente aller auf den Theil CE wirkenden Kräfte in Beziehung zu der Brechungsaxe bei E $P_1 p_1 = \frac{1}{2}\mu_2 a.\left(\frac{a}{2}-a_1\right)-\frac{1}{2}\mu_2 a.\frac{a}{4}=\frac{1}{4}\mu_2 a(a-2a_1)-\frac{1}{8}\mu_2 a$; ferner $J=\frac{1}{12}bc^3$ und $c_1=\frac{1}{2}c$. Die Gleichung (642) ergibt demnach $\frac{1}{4}\mu_2 a(a-2a_1)-\frac{1}{8}\mu_2 a^2=\frac{1}{6}\varepsilon bc^2$ und hieraus folgt

$$\mu_2=\frac{4\varepsilon bc^2}{3a(a-4a_1)} \dots . (681)$$

§. 428. Die vortheilhafteste Stellung der Stützen.

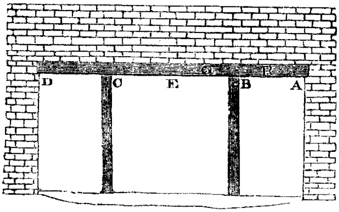
Wenn man sich denkt, die Belastung μ auf die Längeneinheit des Balkens wachse allmählig an; so wird der Bruch entweder bei A oder bei E erfolgen, jenachdem die durch Gleichung (680) oder die durch Gleichung (681) bestimmte Gränze zuerst erreicht wird, oder jenachdem μ_1 oder μ_2 den kleineren Werth hat.

Angenommen, μ_1 sei die kleinere Gränze. Rückt man alsdann die Stütze A näher an das Ende C, sodaß sich die Länge a_1 vermindert; so wird μ_1 wachsen und μ_2 abnehmen. Wenn nun nach dieser Verrückung der Stütze A μ_1 noch kleiner bleibt, als μ_2; so leuchtet ein, daß der Balken eine größere Belastung wird aushalten können, als er vorher konnte, und daß, wenn derselbe durch fortwährende Vermehrung der Belastung zum Bruche in A gebracht ist, er noch nicht im Begriffe sein wird, auch bei E zu brechen. Demnach kann man den Balken noch ferner durch eine abermalige Verrückung der Stütze A von A gegen C verstärken, und diese Verstärkung kann so lange fortgesetzt werden, bis endlich $\mu_1=\mu_2$ wird, in welchem Falle der Balken offenbar die größte Stärke besitzt. Für diese vortheilhafteste Stellung der beiden Stützen ergibt sich aus den Gleichungen (680) und (681) die Bedingung

$$a_1=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)=0{,}22112\,a \dots . (682)$$

§. 429. **Ein rechtwinkliger Balken von konstantem Querschnitte ist über seine ganze Länge gleichförmig belastet und an seinen Enden und in zwei von den Letzteren gleich weit abstehenden Punkten unterstützt; es sollen die Bedingungen für den Bruch angegeben werden.**

Um zuvörderst die Lage der Bruchfläche des Theiles **AB** zu ermitteln; so könnte man hierzu ein ganz ähnliches Verfahren,



wie das in §. 426a befolgte, einschlagen, indem man zuvor nach §. 376 den Widerstand des Stützpunktes **A** bestimmte. Nach der Schlußbemerkung zu §. 414 ist die Lage jener Bruchfläche für einen Balken von konstantem Querschnitte jedoch auch durch die Bedingung bestimmt, daß der Werth des Krümmungshalbmessers **R** der neutralen Linie daselbst ein Minimum oder der Werth von $\frac{1}{R}$ ein Maximum sei. Beachtet man nun, daß nach §. 371 in der Gleichung (548) $\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{R}$ ist; so folgte aus jener Gleichung durch die Differenziation des Ausdruckes $\frac{1}{2}\mu x^2 - P_1 x$, daß die Bruchfläche in dem Abstande $x=\frac{P_1}{\mu}$ von dem Endpunkte **A** liegen müsse. Wäre übrigens dieser Werth von x größer, als a_1; so würde man daraus (ähnlich, wie in §. 426a) den Schluß ziehen, daß der Bruch alsdann nur im Punkte **B** erfolgen könnte. Da man jedoch für $x=\frac{P_1}{\mu}$ aus der Gleichung (548) für den zweiten Differenzialkoeffizienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen *negativen* Werth erhält; so folgt, daß der durch $x=\frac{P_1}{\mu}$ bestimmte Punkt der neutralen Linie in dem gegen die Abszissenaxe *konkav* gekrümmten Theile von **AB**, also jedenfalls zwischen den beiden Punkten **A** und **B** liegen wird. Nur, wenn der Widerstand P_1 des festen Punktes **A**, welcher durch Gleichung (556) gegeben ist, einen negativen Werth hätte, d. h. wenn das Ende A des Balkens durch eine von oben nach unten wirkende Kraft in seiner Lage erhalten werden müßte, sodaß dadurch die Gleichung (548) in $EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\mu x^2+P_1 x$ überginge, würde die Lage der Bruchfläche nicht mehr durch den obigen Werth von x bestimmt sein. In diesem Falle ist offenbar der Werth von $\pm\frac{d^2y}{dx^2}$ oder von $\frac{1}{R}$ dann am größten, wenn x am größten ist. Da aber x nicht $>AB$ angenommen werden kann; so folgt, daß unter dieser Voraussetzung die Bruchfläche des Theiles AB in B liegen wird.

Bezeichnet man, bei Vernachlässigung des letzteren Falles, welcher sich in der Praxis nicht leicht darbieten wird, den Abstand $\frac{P_1}{\mu}$ der Bruchfläche des Theiles AB vom Punkte A mit x_1; so hat man wegen Gleichung (556)

$$x_1=\frac{1}{8}\left(\frac{a}{2}\right)\left[\frac{-8+24n-12n^2-n^3}{n(3-2n)}\right], \quad \ldots . \quad (683)$$

worin a die Länge AD des ganzen Balkens und $n\left(\frac{a}{2}\right)=a_1$ den Abstand AB darstellt.

Ist nun R der Durchschnitt der neutralen Linie mit der Bruchfläche und μ_1 die Belastung auf die Längeneinheit des ganzen Balkens, welche den Bruch des Theiles AB in R erzeugen würde; so ist die Summe der Momente der äußerlich auf RA angebrachten beiden Kräfte P_1 und $\mu_1 x_1$ in Beziehung zu der Brechungsaxe R gleich $P_1 x_1-\frac{1}{2}\mu_1 x_1^2$, weil die letztere Kraft der ersteren direkt entgegen wirkt. Da nach dem Vorhergehenden $x_1=\frac{P_1}{\mu_1}$ ist; so hat man für jene Summe auch den Werth $\frac{1}{2\mu_1}P_1^2$, und mithin nach Gleichung (642) für die Bedingung des Bruches bei R $\frac{1}{2\mu_1}P_1^2=\frac{1}{6}\varepsilon bc^2$, oder

$$P_1^2=\frac{1}{3}\varepsilon\mu_1 bc^2 \quad \ldots . \quad (684)$$

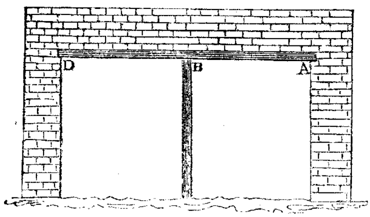
Substituirt man hierin für P_1 den Werth aus Gleichung (556); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon b c^2}{3\left(\frac{a}{2}\right)^2}\left[\frac{8n(3-2n)}{-8+24n-12n^2-n^3}\right]^2 \ldots . (685)$$

Setzt man diesen Werth für μ_1 in Gleichung (684); so erhält man für den Druck $\mathbf{P}_1$, welchen der Unterstützungspunkt **A** auszuhalten hat,

$$\mathbf{P}_1 = \frac{8\varepsilon b c^2}{3\left(\frac{a}{2}\right)}\left[\frac{n(3-2n)}{-8+24n-12n^2-n^3}\right] \ldots . (686)$$

Wenn die beiden mittleren Stützpunkte **B** und **C** in einen



einzigen zusammenfallen, oder wenn nur Eine Stütze in der Mitte des Balkens angebracht ist; so hat man

$a_1 = n\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$, also $n=1$,

und die beiden Gleichungen (685) und (686) reduziren sich auf

$$\mu_1 = \frac{64\varepsilon b c^2}{27\left(\frac{a}{2}\right)^2} \ldots . (687)$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{8\varepsilon b c^2}{9\left(\frac{a}{2}\right)} \ldots . (688)$$

Hinsichtlich des Balkentheiles **BC**, so findet man leicht auf einem ähnlichen Wege, wie in §. 426, daß der Bruch desselben nur in der Mitte **E** erfolgen kann. Dasselbe ergibt sich auch aus der Gleichung (552), indem aus derselben für den größten Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $\frac{1}{\mathbf{R}}$, d. i. für den kleinsten Werth des Krümmungshalbmessers **R**, die Bedingung $\mu x = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\mu a$ (s. Gleichung 555), also $x = \frac{1}{2}a$ folgt. Bezeichnet man nun mit μ_2 die Belastung auf die Längeneinheit des ganzen Balkens, welche im Stande ist, einen Bruch bei **E** zu erzeugen; so ist die Summe der Momente der auf **EA** angebrachten äußeren Kräfte gleich $P_1 . \frac{a}{2} + P_2 . \left(\frac{a}{2} - a_1\right) - \frac{1}{2}\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ oder, da $a_1 = n\left(\frac{a}{2}\right)$ ist, gleich $(P_1 + P_2)\frac{a}{2} - P_2 n\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ oder, weil nach Gleichung (555) $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\mu_2 a$ ist, gleich $\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $- \left[\mu_2\left(\frac{a}{2}\right) - P_1\right] n\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = P_1 n\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}(2n-1)\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Nach Gleichung (642) hat man daher

$$P_1 n\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}(2n-1)\mu_2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}\varepsilon b c^2 \quad \ldots . \quad (689)$$

Substituirt man hierin für P_1 seinen Werth aus Gleichung (556), und löſ't für μ_2 auf; so kommt

$$\mu_2 = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\left[\frac{3-2n}{4(1-n)^2 - n^3}\right] \quad \ldots . \quad (690).$$

Wenn die Belastung fortwährend vermehrt wird; so wird der Balken entweder zwischen A und B in R, oder zwischen B und C in E brechen, jenachdem der Werth von μ_1 aus Gleichung (685), oder der Werth von μ_2 aus Gleichung (690) der kleinere ist.

§. 430. Die beste Stellung der Stützen.

Wie in §. 428, so kann auch hier gezeigt werden, daß die Punkte, in welchen die Stützen angebracht werden müssen, damit der Balken im Stande ist, die größtmögliche Belastung zu ertragen, durch die Bedingung bestimmt sind, daß die Werthe von μ_1 aus Gleichung (685) und von μ_2 aus Gleichung (690) einander gleich werden, sodaß alsdann der Bruch des Balkens gleichzeitig in den Theilen AB, BC und CD erfolgen würde.

Bezeichnet daher $n\left(\frac{a}{2}\right) = a_1$ den Abstand, in welchem die Stütze B von A angebracht werden muß, um jene Gleichheit hervorzubringen; so erhält man, wenn der Werth von μ_1 aus

Gleichung (684) für μ_2 in Gleichung (689) an die Stelle gesetzt wird,

$$P_1^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2P_1\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{n\varepsilon b c^2}{3(2n-1)} = -\frac{(\varepsilon b c^2)^2}{9(2n-1)}.$$

Löst man diese quadratische Gleichung für $P_1\left(\frac{a}{2}\right)$ auf; so kommt

$$P_1\left(\frac{a}{2}\right) = \tfrac{1}{3}\varepsilon b c^2\left[\frac{n \pm (1-n)}{2n-1}\right].$$

Um zu entscheiden, ob in diesem Ausdrucke die Größe $(1-n)$ positiv oder negativ zu nehmen sei; so bemerkt man, daß für das negative Zeichen von $(1-n)$ $P_1 = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a}{2}\right)}$ und demnach wegen Gleichung (684) $\mu_1 = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ oder $\mu_1\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a}{2}\right)} = P_1$ werden würde, was unmöglich ist, da alsdann die beiden Unterstützungspunkte A und D des Balkens die ganze Belastung tragen und der Druck P_2 auf eine jede der Stützen B und C null sein müßte.

Nimmt man daher die Größe $(1-n)$ mit dem positiven Zeichen; so erhält man $P_1\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\varepsilon b c^2}{3(2n-1)}$. Substituirt man hierin für P_1 seinen Werth aus Gleichung (686) und reduzirt gehörig; so ergibt sich

$$\frac{8n(2n-1)(2n-3)}{n^3+12n^2-24n+8} = 1.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind 1,57087, 0,61078 und 0,26994. Die erste und letzte derselben sind unzulässig, indem die erste >1 ist, also verlangen würde, daß $a_1 = n\left(\frac{a}{2}\right) > \frac{a}{2}$ wäre, und die letzte so klein ist, daß dadurch der Widerstand P_1 des festen Punktes A einen negativen Werth annähme, was der gemachten Voraussetzung offenbar widerspricht. Die beste Stellung der Stützen ist also durch den Werth

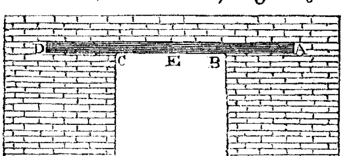
$$n = 0{,}61078 \quad \ldots \quad (691)$$

bestimmt, sodaß etwa $a_1 = \frac{3}{5}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{10}a$ genommen werden müßte.

§. 431. Die Bedingungen für den Bruch eines rechtwinkligen Balkens, welcher über seine Länge gleichförmig belastet und mit seinen beiden Enden fest vermauert ist.

In §. 378 hat man gesehen, daß die Bedingungen für die Biegung eines Balkens in dem vorliegenden Falle dieselben sind, als wenn die Enden desselben bis zu einem festen Punkte **A** (s. die erste Figur zu §. 429) um $\overline{AB} = 0{,}6202\,\overline{AE}$ verlängert wären und der Balken selbst in **B** und **C** einfach auf zwei Stützen gelegt wäre. Die Belastung, welche den Bruch des Balkens herbeiführen würde, ist demnach gleich der, welche den Bruch eines in §. 429 betrachteten Balkens zwischen den mittleren Stützen erzeugen würde, und durch den Werth von μ_2 (Gleichung 690) bestimmt, welcher sich für $n = 0{,}6202$ ergibt.

In jener Gleichung bezeichnet a die Länge **AD**: bezeichnet man nun mit a' den Abstand **BC** zwischen den Unterstützungsmauern; so hat man $\frac{a}{2} - a_1 = (1-n)\frac{a}{2} = \frac{a'}{2}$. Setzt man



daher in Gleichung (690) $\frac{a}{2} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{a'}{2}\right)$; so wird dieselbe

$$\mu_2 = \frac{4}{3}\,\frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a'}{2}\right)^2}\,\frac{(1-n)^2\,(3-2n)}{4(1-n)^2 - n^3},$$

und wenn man hierin $n = 0{,}6202$ substituirt, (indem man die Beziehung $8 - 16n + 5n^2 = 0$ aus §. 378 berücksichtigt)

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon b c^2}{\left(\frac{a'}{2}\right)^2} = \frac{4\varepsilon b c^2}{a'^2} \quad \ldots \quad (692)$$

Hierdurch ist die Belastung auf die Längeneinheit des Balkens bestimmt, welche im Stande ist, den Bruch desselben herbeizuführen.

Wenn der Balken nicht über die Stützpunkte B und C hinaus verlängert und fest vermauert wäre; so würde die zum Bruche desselben erforderliche Belastung auf die Längeneinheit durch die Gleichung (674) dargestellt sein.

Eine Vergleichung dieser Formel mit der vorstehenden (692) zeigt, daß ein mit seinen Enden fest vermauerter Balken das Dreifache der Belastung zu tragen im Stande ist, welche ein an seinen Enden einfach unterstützter Balken zu ertragen vermag.

Widerstand gegen das Zerknicken.

§. 432. Wenn die Länge der prismatischen Körper, welche durch eine Kraft in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt werden, eine gewisse Gränze überschreitet (s. §. 408); so erfolgt zuletzt der Bruch in Folge einer Biegung — die Körper werden zerknickt. Alle Kenntniß über die hierbei obwaltenden Beziehungen zwischen den Dimensionen der Prismen und der Größe der brechenden Kraft, auf welche man sich mit Sicherheit verlassen kann, verdankt man nur der Erfahrung. Die Hypothese, von welcher man bei der theoretischen Untersuchung dieses Gegenstandes gewöhnlich ausging, ist so unzureichend, und die daraus hervorgehenden Resultate stimmen nach den neueren Versuchen von Hodgkinson so wenig mit denen der Praxis überein, daß die hohe Sanktion, welche dieselbe durch die Arbeiten von Euler, Lagrange, Poisson und Navier erhalten hat, nicht länger einen Anspruch für sie begründen kann, unter den Prinzipien der Wissenschaft zugelassen zu werden.

Wenn

d den äußeren Durchmesser des kreisförmigen Querschnittes oder die Seite des quadratischen Querschnittes einer Säule in rheinländischen Zollen,

d_1 den inneren Durchmesser einer hohlen zylindrischen Säule in rheinländischen Zollen,

L die Länge der Säule in Fußen und

W das zerknickende Gewicht in köllnischen Pfunden bezeichnet; so erhält die nachstehende Tabelle die wichtigsten Resultate, welche sich aus einer Reihe schätzbarer Versuche von Hodgkinson ergeben:

Bezeichnung der Säule.	Wenn die Säule an beiden Enden abgerundet ist und ihre Länge den Durchmesser des Querschnittes 15mal überschreitet.	Wenn die beiden Endflächen eben sind und die Länge der Säule den Durchmesser des Querschnittes 30mal überschreitet.
Volle zylindrische Säule von Gußeisen	$W = 34358 \frac{d^{3,76}}{L^{1,7}}$	$W = 101254 \frac{d^{3,55}}{L^{1,7}}$
Hohle zylindrische Säule von Gußeisen	$W = 29977 \frac{d^{3,76} - d_1{}^{3,76}}{L^{1,7}}$	$W = 101618 \frac{d^{3,55} - d_1{}^{3,55}}{L^{1,7}}$
Volle zylindrische Säule von Schmiedeeisen	$W = 97830 \frac{d^{3,76}}{L^2}$	$W = 303847 \frac{d^{3,55}}{L^2}$
Volle quadratische Säule von Danziger Eichenholz (trocken)	. . . .	$W = 25205 \frac{d^4}{L^2}$
Volle quadratische Säule von Fichtenholz (trocken)	. . . .	$W = 17977 \frac{d^4}{L^2}$

In allen Fällen fand man, daß die Stärke einer Säule, von welcher nur Ein Ende abgerundet war, das arithmetische Mittel zwischen den Stärken zweier anderen Säulen von denselben Dimensionen bildete, von denen die Eine abgerundete und die andere ebene Endflächen hatte.

Die vorstehenden Resultate beziehen sich nur auf den Fall, wo die Länge der Säule so groß ist, daß der Bruch ganz allein in Folge der Biegung des Materiales erfolgt. Diese Gränze in der Länge der Säulen, wo ein wirkliches Zerknicken eintritt, ist von Hodgkinson für Säulen von Gußeisen auf etwa das 15fache des Durchmessers festgesetzt, wenn die Enden abgerundet sind, und auf das 30 fache des Durchmessers, wenn dieselben eben sind. Bei kürzeren Säulen erfolgt der Bruch theils durch das Zerdrücken und theils durch das Zerknicken des Materiales. Für diese kürzeren Säulen stellte sich folgende Regel mit ziemlicher Genauigkeit heraus: Wenn W_1 das Gewicht bezeichnet, welches nach den obigen Formeln den Bruch der Säule bloß durch Biegung herbeiführen würde (wenn dieselbe nicht zerdrückt würde) und W_2 das Gewicht darstellt, welches nach der Tabelle am Ende dieses Werkes den Bruch der Säule bloß durch Zerdrücken erzeugen würde (wenn dieselbe nicht gebogen würde); so ist der wirkliche Werth des brechenden Gewichtes

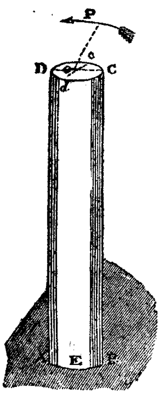
$$W = \frac{W_1 W_2}{W_1 + \frac{3}{4} W_2} \quad \ldots \quad (693)$$

Säulen, welche in der Mitte erweitert sind. Es fand sich, daß die Stärke von gußeisernen Säulen, deren Durchmesser in der Mitte anderthalb bis zweimal so groß waren, als an den Enden, um $\frac{1}{7}$ stärker waren, als zylindrische Säulen, welche ebenso viel Material enthielten, wenn ihre Enden abgerundet waren, und um $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{9}$, wenn ihre Enden eben waren.

Torsion.

§. 433. Elastizität der Torsion.

ABCD sei ein voller Zylinder, von welchem Ein Querschnitt

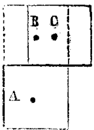


AEB unbeweglich festgehalten und ein jeder andere in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt vermöge einer Kraft **P** gedrehet wird, welche in der Ebene des Querschnittes **CD** und in dem Abstande a von der Axe des Zylinders angebracht ist. Von dem Zylinder wird unter diesen Umständen gesagt, er sei der Torsion unterworfen, und die Kräfte, welche derselbe der Veränderung seiner Form entgegensetzt, bilden seinen Widerstand gegen die Torsion.

Um die Erscheinungen der Torsion einer theoretischen Untersuchung zu unterwerfen; so betrachtet man den Zylinder als aus lauter unendlich dünnen Schichten zusammengesetzt, welche durch die Wirkung der Kraft **P** gezwungen werden, über einander her zu gleiten, ohne daß dabei die gegenseitige Lage der Massentheilchen einer jeden einzelnen Schicht geändert würde. Diesem Gleiten von je zwei solcher Schichten aufeinander setzen die

Molekularkräfte der in beiden enthaltenen Massentheilchen einen Widerstand entgegen, welchen man sich in folgender Weise zu denken hat.

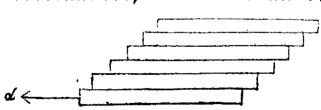
A und B seien die Mittelpunkte zweier einfacher Massentheilchen, von denen das erstere festgehalten, und das letzrete durch eine Kraft p in



perpentikularer Richtung zu dem Abstande $AB = \alpha$ fortgezogen wird. Die über die Elastizität der Torsion angestellten Versuche lehren nun, daß die Verrückung BC des Mittelpunktes von B genau der Größe der Kraft p proportional ist. Bezeichnet man daher den Werth der Kraft p, welcher erforderlich ist, um den Mittelpunkt des oberen Theilchens so weit zu verrücken, daß die Verrückung BC gleich dem Abstande $AB = \alpha$ zweier benachbarter Theilchen wird, mit t; so hat man für den Werth jener Kraft, welcher im Stande ist, irgend eine Verrückung β des oberen Theilchens zu bewirken, $p = t\,\frac{\beta}{\alpha}$. Zugleich leuchtet ein, daß die Kraft t das obere Theilchen so weit verschieben wird, daß die Linie CA mit AB einen Winkel von 45° einschließt.

Hätte man nun statt der beiden einzelnen Theilchen A und B auf jeder Seite deren n, welche zusammen zwei sehr dünne Schichten von Einem Quadratzoll Grundfläche ausmachten; so würde zur Verrückung der oberen Schicht auf der unteren um eine Entfernung gleich α offenbar eine Kraft $nt = T$ und zur Verrückung um eine beliebige Entfernung β eine Kraft $p = T\,\frac{\beta}{\alpha}$ erforderlich sein.

Lägen endlich m solcher Schichten, von denen eine jede eine Höhe α und eine Grundfläche von Einem Quadratzoll besäße, übereinander, und wäre an der obersten die Kraft p in paralleler



Richtung zu den Berührungsflächen der Schichten angebracht; so würde zuvörderst die oberste auf der nächstfolgenden um eine Entfernung $\beta_1 = \frac{\alpha p}{T}$ verschoben werden. Die hierdurch zwischen der ersten und zweiten Schicht sich erzeugende Spannung, welche offenbar $= p$ ist, würde aber auch eine gleiche Verschiebung der zweiten auf der dritten Schicht bewirken, sodaß die relative Verrückung der ersten Schicht gegen die dritte $\beta_2 = \frac{2\alpha p}{T}$ sein würde. Ebenso wird die auf die dritte Schicht sich äußernde Spannung eine Verschiebung dieser Schicht über der vierten gleich β_1 herbeiführen, und die gesammte Verrückung der ersten Schicht in Beziehung zu der vierten wird demnach $\beta_3 = \frac{3\alpha p}{T}$ sein, und so fort. Hieraus geht hervor, daß wenn die $(m+1)$ste Schicht unverrückbar ist, die Verschiebung der obersten Schicht, auf welche die Kraft p wirkt, gegen die unterste oder $(m+1)$ste Schicht $\beta_m = \frac{m\,\alpha p}{T}$ sein wird. Bezeichnet man hiernach die gesammte Höhe $m\alpha$ der m verschobenen Schichten mit α und die Verrückung der obersten in Beziehung zur untersten mit β; so hat man zwischen den Größen α, β, T und der die Verschiebung erzeugenden Kraft p die Gleichung

$$\beta = \frac{\alpha p}{T} \text{ oder } p = T\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Wenn die Verschiebung β der obersten Schicht eines Prismas von Einem Quadratzoll Querschnitt gegen die unterste Schicht der gesammten Höhe α des Prismas gleichkommt; so wird die hierzu erforderliche Kraft $p = T$. Diese Kraft T, in Pfunden ausgedrückt, nennt man den Model der Torsion.

Es leuchtet ein, daß wenn der Querschnitt eines solchen Prismas K Quadratzoll betrüge, die einer Verrückung β der obersten Schicht entsprechende Kraft

$$P = TK\,\frac{\beta}{\alpha}$$

sein würde.

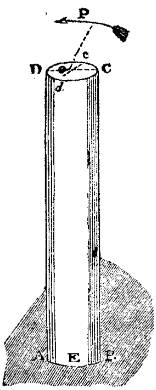
Um nun zu der Erklärung der Erscheinungen der Torsion zurückzukehren; so bezeichne

P die Kraft, welche in der Ebene des obersten Querschnittes DC eines vollen Zylinders und in dem Abstande

a von der Axe desselben die Torsion bewirkt,

L die Länge des Zylinders,

r den Halbmesser des Querschnittes.



Wenn ferner irgend ein Durchmesser DC des obersten Querschnittes in Folge der Torsion in die Lage dc gekommen ist; so sei

ϑ der Bogen, welcher dem Torsionswinkel Dod in einem Kreise angehört, dessen Halbmesser die Einheit ist (will man statt des Bogens ϑ die Winkelgröße ϑ' in Graden einführen; so hat man für ϑ den Werth $\frac{\pi}{180}\vartheta'$ zu substituiren). Endlich sei

ϱ der Abstand irgend eines sehr schmalen konzentrischen Ringes des Querschnittes DC von der Axe des Zylinders und

T der Model der Torsion*).

Betrachten wir jetzt eine hohle zylindrische Schale, deren innerer Halbmesser $=\varrho$ und deren unendlich geringe Dicke $=\triangle\varrho$, deren Querschnitt also $=2\pi\varrho\triangle\varrho$ ist; so wird die Verrückung des obersten Querschnittes dieses hohlen Zylinders gegen die feste Grundfläche gleich $\varrho\vartheta$ sein, und da die ganze Höhe desselben gleich L ist; so hat man nach der vorhergehenden Untersuchung für die Kraft, welche am Umfange dieses hohlen Zylinders wirken müßte, um jene Verrückung zu erzeugen, den Werth

$$\mathrm{TK}\,\frac{\beta}{\alpha}=\mathrm{T}.2\pi\varrho\triangle\varrho.\frac{\varrho\vartheta}{\mathrm{L}}=2\pi\mathrm{T}\,\frac{\vartheta}{\mathrm{L}}\,\varrho^2\triangle\varrho.$$

Das Moment dieser Kraft in Beziehung zu der Axe des Zylinders ist $2\pi\mathrm{T}\frac{\vartheta}{\mathrm{L}}\varrho^3\triangle\varrho$.

Denkt man sich den gegebenen vollen Zylinder in lauter solche zylindrische Schalen von der unendlich geringen Dicke $\triangle\varrho$ zerlegt; so erhält man für das Moment der Kraft, welche im Stande ist, die entsprechende Torsion einer dieser Schalen zu bewirken, einen ähnlichen Ausdruck, wie den vorstehenden. Da nun die

---

*) Da sich der Werth des Models T auf die Verschiebung der Querschnitte eines Prismas von Einem Quadratzoll Querschnitt bezieht; so müssen alle Längen nach Zollen gemessen werden. Wollte man dieselben nach Fußen messen; so müßte überall 144 T an die Stelle von T gesetzt werden.

Summe der Momente aller dieser Kräfte in Beziehung zu der Axe des Zylinders dem Momente der Kraft **P** in Beziehung zu derselben Axe gleich sein muß; so hat man

$$\mathrm{P}\,a = 2\pi\mathrm{T}\,\frac{\vartheta}{\mathrm{L}}\,\Sigma\varrho^3\triangle\varrho,$$

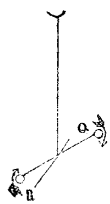
oder weil $\triangle\varrho$ unendlich klein ist,

$$\mathrm{P}\,a = 2\pi\mathrm{T}\,\frac{\vartheta}{\mathrm{L}}\int_0^r\varrho^3\,d\varrho = \mathrm{T}\,\frac{\pi r^4}{2\mathrm{L}}\,\vartheta \quad \ldots . \; (694)$$

hieraus folgt zur Bestimmung des Torsionswinkels

$$\vartheta = \left(\frac{2a}{\pi\mathrm{T}}\right)\frac{\mathrm{PL}}{r^4} \quad \ldots . \; (695).$$

Man sieht demnach, daß wenn die Dimensionen des Zylinders gegeben sind, der Torsionswinkel δ mit der Kraft **P**, durch welche die Torsion hervorgebracht wird, in geradem Verhältnisse variirt. Setzt man nach Gleichung (694) $\mathrm{P} = \left(\frac{\pi r^4\,\mathrm{T}}{2\,a^2\,\mathrm{L}}\right)(a\vartheta)$; so bezeichnet $a\vartheta$ den Weg, welchen der Angriffspunkt der Kraft **P** bei Beschreibung des Winkels ϑ zurückgelegt hat, und die Kraft



P variirt auch direkt, wie dieser Weg. Denkt man sich daher in dem Abstande a von der Axe des Zylinders auf beiden Seiten desselben zwei Massen **Q** und **R** von dem Gesammtgewichte **W**, also von der Masse $\frac{\mathrm{W}}{g}$ angebracht und mit dem Zylinder durch einen festen Stab **QR** verbunden; so werden diese Massen, nachdem der Zylinder zuvor der Torsion unterworfen und alsdann freigelassen ist, nach §. 97 fortwährend um ihre Ruhelage oszilliren. Die Amplitude dieser Oszillationen wird $2a\vartheta$ sein und ihre Dauer

$$\mathrm{t} = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{g\left(\frac{\pi r^4\,\mathrm{T}}{2\,a^2\,\mathrm{L}}\right)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{g\mathrm{T}}}\cdot\frac{a\sqrt{\mathrm{WL}}}{r^2} \quad \ldots \; (696).$$

Das Vorstehende ist offenbar die Theorie der Coulombschen Drehwage, indem dabei die Trägheit des Zylinders selbst gegen die Trägheit des herumgeführten Gewichtes W, als ungemein klein, vernachlässigt wird.

Wenn statt des Zylinders ein Prisma von beliebigem Querschnitte K der Torsion unterworfen wäre; so würde irgend ein Element $\triangle K$ des obersten Querschnittes, welches in der Entfernung ϱ von der Axe des Prismas liegt, um $\varrho\vartheta$ gegen das entsprechende Element des untersten Querschnittes verschoben sein. Zur Verrückung der Schichten dieses elementaren prismatischen Theiles von dem Querschnitte $\triangle K$ ist in dem Abstande ϱ von der Axe des gegebenen Prismas eine Kraft $T\triangle K\frac{\beta}{\alpha}=T\triangle K\frac{\varrho\vartheta}{L}$ $=T\frac{\vartheta}{L}\varrho\triangle K$ erforderlich. Da nun das Moment dieser Kraft in Beziehung zu der gemeinschaftlichen Umdrehungsaxe $T\frac{\delta}{L}\varrho^2\triangle K$ ist, und das Moment Pa der die Torsion bewirkenden Kraft der Summe der Momente aller ähnlichen elementaren Kräfte gleich sein muß; so erhält man allgemein

$$Pa=T\frac{\vartheta}{L}\Sigma\varrho^2\triangle K=TJ\frac{\vartheta}{L},$$

worin $J=\Sigma\varrho^2\triangle K$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung zu der Umdrehungsaxe des Prismas bezeichnet. Für den Torsionswinkel ϑ folgt hieraus

$$\vartheta=\frac{aLP}{TJ}.$$

Den Werth des Trägheitsmomentes J für eine Fläche kann man immer aus der einmal bekannten Formel für das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers ableiten, dessen Querschnitt jener Fläche gleich ist, wenn man die Dimension in perpendikularer Richtung zu dem Querschnitte als unendlich klein annimmt und dann den Ausdruck für das Trägheitsmoment des Körpers durch diese Dimension dividirt (s. §. 361). Wenn die Axe, in Beziehung zu welcher das Trägheitsmoment der Fläche und resp. des prismatischen Körpers von gleichem Querschnitte genommen werden soll, auf der Fläche perpendikular steht, wie es hier bei der Anwendung auf die Torsion immer der Fall ist; so wird der

Werth des Trägheitsmomentes J_1 des entsprechenden prismatischen Körpers stets das Produkt aus der Länge dieses Körpers (in perpendikularer Richtung zu dem Querschnitte) in irgend eine Funktion sein, welche nur von den Dimensionen des Querschnittes abhängt, sodaß man das Trägheitsmoment dieses Querschnittes erhalten würde, wenn man das des Körpers durch seine Länge dividirte. Bezeichnet man demnach das Trägheitsmoment des ganzen Prismas, welches der Torsion unterworfen ist, in Beziehung zu seiner Umdrehungsaxe mit J_1; so hat man für das Trägheitsmoment des Querschnittes K in Beziehung zu derselber Axe $J = \frac{J_1}{L}$. Substituirt man diesen Werth in die vorstehenden Formeln; so kann man für dieselben auch setzen

$$\left.\begin{aligned} P\,a &= T\,J_T\,\frac{\vartheta}{L^2} \text{ und} \\ \vartheta &= \frac{a L^2 P}{T J_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (696^a).$$

Wäre das der Torsion unterworfene Prisma z. B. ein Parallelepipedum, dessen Querschnitt die Dimensionen b und c hätte; so würde nach Gleichung (61) $J_1 = \frac{1}{12} L b c (b^2 + c^2)$ und demnach $J = \frac{J_1}{L} = \frac{1}{12} b c (b^2 + c^2)$ sein, sodaß man in diesem Falle für den Torsionswinkel den Werth

$$\vartheta = \frac{12 a L P}{T b c (b^2 + c^2)} \quad \ldots . (697)$$

und in dem Falle, wo der Querschnitt ein Quadrat, also $b = c$ wäre, den Werth

$$\vartheta = \frac{6 a L P}{T b^4} \quad \ldots . (697^a)$$

erhielte.

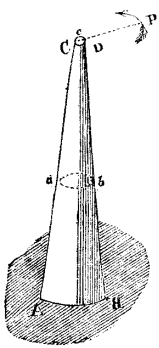
Cauchy hat gezeigt, daß der Werth des Models der Torsion T und des Models der Elastizität E in der Beziehung

$$T = \tfrac{2}{5} E \quad \ldots . (698)$$

zueinander stehen. Es ist daher leicht, den einem jeden Materiale entsprechenden Werth von T aus dem zugehörigen, in der Tabelle am Ende dieses Werkes angegebenen Werthe von E zu berechnen.

§. 434. Torsion eines Körpers mit kreisförmigem Querschnitte von veränderlichen Dimensionen.

ab sei eine unendlich dünne Schicht des Körpers zwischen zwei auf der Axe desselben perpendikular stehenden Ebenen. Die



Dicke dieser Schicht sei das Element $\triangle x$ des Abstandes x derselben von dem untersten Querschnitte AB, und ihr Halbmesser sei gleich y. Aus den in §. 433 festgestellten Begriffen geht hervor, daß die Spannung, welche die Kraft P zwischen der obersten und der zunächst folgenden unendlich dünnen Schicht des Körpers erzeugt, sich allmählich über alle folgenden Schichten fortpflanzt, sodaß der Gesammtbetrag der Spannungen zwischen den Massentheilchen irgend zweier aufeinander folgenden Schichten derselbe ist, als wenn die Kraft P in dem Abstande a von der Axe des Körpers in der Ebene der obersten solcher zweier beliegen Schichten angebracht wäre. Bezeichnet man daher die Verschiebung der Schicht *ab* auf der zunächst darunter liegenden mit $\triangle \vartheta$; so hat man nach Gleichung (695), indem man $\triangle x$ statt L und y statt r substituirt,

$$\triangle \vartheta = \frac{2aP}{\pi T} \frac{\triangle x}{y^4}.$$

Nimmt man jetzt die Summe der Verschiebungen $\triangle \vartheta$ für alle einzelnen Schichten, welche in der ganzen Länge L des Körpers enthalten sind in Beziehung zu den unmittelbar darunter liegenden; so wird dieselbe offenbar die Größe des Torsionswinkels ϑ darstellen, um welche ein jeder Durchmesser des obersten Querschnittes CD gegen den korrespondirenden Durchmesser des untersten Querschnittes AB verrückt ist. Man hat also

$$\vartheta = \sum_0^{\vartheta} \triangle \vartheta = \frac{2aP}{\pi T} \sum_0^{L} \frac{\triangle x}{y^4},$$

oder weil $\triangle\vartheta$ und $\triangle x$ als unendlich klein gedacht sind,

$$\vartheta = \int_0^{\vartheta} d\vartheta = \frac{2aP}{\pi T}\int_0^L \frac{dx}{y^4} \quad \ldots\ldots (699).$$

Wenn die Seiten **AC** und **BD** des Körpers gerade Linien sind, sodaß derselbe einen abgestumpften Kegel bildet, dessen unterer Halbmesser $= r_1$ und dessen oberer Halbmesser $= r_2$ ist; so hat man $x = \frac{(r_1 - y)L}{r_1 - r_2}$, folglich $dx = -\frac{L}{r_1 - r_2}dy$ und daher

$$\int_0^L \frac{dx}{y^4} = -\frac{L}{r_1 - r_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dy}{y^4} = \tfrac{1}{3}\frac{L}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = \tfrac{1}{3}\frac{L(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{r_1^3 r_2^3}.$$

Substituirt man dieser Werth in Gleichung (699); so ergibt sich

$$\vartheta = \tfrac{2}{3}\frac{aLP}{\pi T}\cdot\frac{(r^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{r_1^3 r_2^3} \quad \ldots\ldots (700).$$

§. 435. Bruch durch Torsion.

Wenn die Torsion eines Körpers über die Gränzen seiner Festigkeit hinaus getrieben wird; so leuchtet ein, daß der Bruch zuerst in denjenigen Elementen irgend eines Querschnittes erfolgen wird, welche der Oberfläche des Körpers am nächsten liegen, weil für diese Elemente die Verrückung in Beziehung zu den darunter liegenden am größten ist.

Bezeichnet nun τ die Kraft, welche erforderlich ist, um zwei Schichten des Körpers von Einem Quadratzoll Querschnitt so weit übereinander her zu schieben, daß der Bruch erfolgt; so wird τ den Torsionswiderstand für den Quadratzoll in denjenigen Punkten darstellen, welche von der Axe des Körpers am weitesten entfernt liegen. Nehmen wir daher an, der durch Torsion bis zum Bruche gebrachte Körper sei prismatisch und r sei die größe Entfernung des Umfanges seines Querschnittes von der Umdrehungsaxe; so wird der Torsionswiderstand für den Quadratzoll in der Entfernung r von der Axe in jedem Querschnitte gleich τ sein.

Da die Verrückung der Theilchen zweier übereinander liegender Schichten mit dem Abstande derselben von der Axe in geradem Verhältnisse steht, und der Widerstand der Torsion dieser Verrückung proportional ist; so wird der Letztere für die Massentheilchen, welche um ϱ von der Axe abstehen, den Werth $\tau \frac{\varrho}{r}$ für jeden Quadratzoll, also für ein jedes Element $\triangle K$ des Querschnittes den Werth $\frac{\tau}{r}\varrho\triangle K$ haben. Das Moment dieses Widerstandes in Beziehung zur Umdrehungsaxe ist $\frac{\tau}{r}\varrho^2\triangle K$, und demnach die Summe der Momente der Widerstände aller in Einem Querschnitte liegenden Elemente $\frac{\tau}{r}\Sigma\varrho^2\triangle K = \frac{\tau}{r}J$, wenn man mit J das Trägheitsmoment $\Sigma\varrho^2\triangle K$ des Querschnittes in Beziehung zu der Axe des prismatischen Körpers darstellt. Da nun die erwähnten Widerstände mit der Kraft P, welche in dem Abstande a von der Axe den Bruch durch Torsion bewirkt, im Gleichgewichte sind; so hat man

$$Pa = \tau\frac{J}{r} \quad \ldots \quad (701)$$

Wenn der Körper ein Zylinder ist; so hat man $J = \frac{1}{2}\pi r^4$ und demnach

$$Pa = \tfrac{1}{2}\tau\pi r^3 \quad \ldots \quad (701^a)$$

Wenn der Querschnitt des Körpers ein Rechteck von den Seiten b und c ist; so hat man $J = \frac{1}{12}bc(b^2+c^2)$ und für den Abstand der äußersten Massentheilchen von der Axe $r = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$; demnach

$$Pa = \tfrac{1}{6}\tau bc\sqrt{b^2+c^2}, \quad \ldots \quad (702)$$

und wenn der Querschnitt ein Quadrat von der Seite b ist,

$$Pa = \frac{\sqrt{2}}{6}\tau b^3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\tau b^3 \quad \ldots \quad (702^a)$$

Die Länge eines Prismas, welches der Torsion unterworfen ist, hat keinen Einfluß auf die wirkliche Größe der Kraft, welche erforderlich ist, um den Bruch herbeizuführen. Dieselbe affizirt nur den Torsionswinkel (Gleichung 695), welcher dem Bruche vorhergeht, und demnach den Raum, welchen die brechende Kraft durchlaufen muß, und den Betrag an Arbeit, welcher verrichtet werden muß, um den Bruch herbeizuführen.

Nach Cauchy steht der Werth der Kraft τ, welche man den Brechungskoeffizienten für die Torsion nennen kann, mit dem Werthe des Brechungskoeffizienten ε für die Biegung in der Beziehung

$$\tau = \tfrac{4}{5}\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (703)$$

und kann demnach aus dem letzteren, welcher sich für verschiedene Materialien in der Tabelle am Ende dieses Werkes befindet, leicht berechnet werden.*)

Die größten Kräfte, welchen man die Materialien in den Konstruktionen mit Sicherheit aussetzen darf.

§. 436. Die in der Tabelle am Ende dieses Werkes mitgetheilten Werthe der absoluten und rückwirkenden Festigkeit, sowie der Brechungskoeffizienten für die Biegung und Torsion in Beziehung zu verschiedenen Materialien setzen voraus, daß das den brechenden Kräften ausgesetzte Material in allen seinen Theilen die möglich größte Gleichartigkeit und Solidität darbiete. Beide Bedingungen werden in der Praxis sehr selten erfüllt, sodaß man in den meisten Fällen von den in Konstruktionen zu verwendenden Körpern nicht denjenigen Grad von Haltbarkeit erwarten darf, welcher den kleinen mit Sorgfalt ausgewählten Prismen eigen ist, die bei den Versuchen zur Bestimmung der Festigkeit des betreffenden Materiales gedient haben.

Außerdem wird die innere Konstitution der Materialien, welche zu Baukonstruktionen benutzt werden, selbst wenn sie anfänglich wirklich von sehr guter Beschaffenheit war, durch den dauernden Einfluß der Agenzien in der umgebenden Natur, durch schädliche Erschütterungen und durch die anhaltende Wirkung der

*) Auch hier gilt die Bemerkung, daß wenn sich der Werth des Koeffizienten τ auf den Torsionswiderstand eines jeden Quadratzolles des Querschnittes bezieht, alle Längen in Zollen gemessen werden müssen. Wollte man den Fuß als Längeneinheit annehmen; so müßte man überall 144τ an die Stelle von τ setzen.

darauf angebrachten Kräfte immer mehr von dem normalen Zustande entfernt.

Hierzu kommt noch, daß man einer jeden Konstruktion ein gewisses Übermaaß von Festigkeit geben muß, theils um dieselbe fähig zu machen, den verstärkten Wirkungen plötzlich auftretender äußerer Kräfte einen genügenden Widerstand entgegenzusetzen, theils um dadurch die Mängel auszugleichen, welche sich in der Praxis bei der Herstellung der einzelnen Theile nicht immer vermeiden lassen.

In Berücksichtigung der vorstehenden Umstände würde man daher bei der Berechnung der Dimensionen von Konstruktionstheilen, welche dem Bruche durch verschiedenartige Kräfte widerstehen sollen, in die betreffenden Formeln des vorstehenden Abschnittes für die Koeffizienten λ, $\varkappa$, ε und τ weit geringere Zahlenwerthe einzuführen haben, als sie durch die Tabelle am Ende dieses Werkes gegeben sind. Wenn man die für die praktische Anwendung reduzirten Werthe jener Koeffizienten resp. mit λ_1, $\varkappa_1$, ε_1 und τ_1 bezeichnet; so kann man denselben in den verschiedenen Fällen nach Navier folgende Werthe geben.

Absolute Festigkeit. Für Metalle bei dauernder Belastung $\lambda_1 = \frac{1}{6}\lambda$, bei wechselnder Belastung $= \frac{1}{3}\lambda$ bis $\frac{1}{4}\lambda$.

Für Holz $\lambda_1 = \frac{1}{10}\lambda$.

Rückwirkende Festigkeit. Für Schmiedeeisen $\varkappa_1 = \frac{1}{6}\varkappa$.

Für Gußeisen $\varkappa_1 = \frac{1}{4}\varkappa$.

Für regelmäßig behauene Steine in niedrigen Konstruktionen $\varkappa_1 = \frac{1}{10}\varkappa$, in hohen Säulen und Pfeilern und in Gewölbbögen $\varkappa_1 = \frac{1}{15}\varkappa$.

Für Holz $\varkappa_1 = \frac{1}{10}\varkappa$.

Brechungskoeffizient für die Biegung. Für Metalle $\varepsilon_1 = \frac{1}{6}\varepsilon$.

Für Holz $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}\varepsilon$.

Widerstand gegen das Zerknicken. Die aus den Formeln des §s. 432 sich ergebenden Werthe für die Kräfte, durch welche lange Prismen in Folge eintretender Biegung zerdrückt werden, sind in der Praxis nach denselben Verhältnissen zu reduziren, wie die Kräfte, welche den Bruch durch Überwindung der rückwirkenden Festigkeit herbeiführen.

Brechungskoeffizient für die Torsion. Für Metalle $\tau_1 = \frac{1}{6}\tau$.

Für Holz $\tau_1 = \frac{1}{10}\tau$.

Sechster Abschnitt.

Vom Stoße.

Der gerade Stoß.

§. 437. Der Stoß zweier Körper, deren Schwerpunkte sich in Einer geraden Linie bewegen, und deren Berührungspunkte in ebenderselben Linie liegen.

Wenn sich zwei Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten (entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten) bewegen und demzufolge zusammentreffen; so werden sie, wenn sie nicht absolut hart sind, eine gegenseitige Eindrückung ihrer Oberflächen herbeiführen. Diese Eindrückung wird vom ersten Augenblicke des Stoßes an so lange zunehmen, bis ein Moment eintritt, wo die Geschwindigkeiten der beiden Körper sich gegenseitig ausgeglichen haben. In diesem Augenblicke der größten Zusammendrückung wird der gemeinsame Druck zwischen beiden Körpern gänzlich aufhören, wenn sie unelastisch sind, und dieselben werden sich nach dem Stoße mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit weiterbewegen: sind sie jedoch elastisch; so werden ihre Oberflächen in die frühere Form zurückzukehren streben, und demnach die Geschwindigkeiten der Körper nochmals so lange verändern, bis jenes Bestreben befriedigt ist; die Körper werden also in diesem Falle nach dem Stoße verschiedene Geschwindigkeiten besitzen.

Im Folgenden bezeichne nun

W_1 das Gewicht eines Körpers, welcher sich in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt und auf einen zweiten Körper stößt,

V_1 die Geschwindigkeit desselben vor dem Stoße,

W_2 das Gewicht eines zweiten Körpers, welcher von dem ersteren gestoßen wird,
V_2 dessen Geschwindigkeit vor dem Stoße,
V die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der größten Zusammendrückung ihrer Oberflächen,
v_1 die Geschwindigkeit des ersten Körpers nach dem Stoße,
v_2 die Geschwindigkeit des zweiten Körpers nach dem Stoße,
$g = 31,2644$ Fuß die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Sekunde mittheilt.

§. 438. Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V zweier aufeinanderstoßender Körper im Augenblicke der größten Zusammendrückung.

Der während des Stoßes der beiden Körper zwischen ihnen sich erzeugende Druck bildet, wenn die Körper sich nach derselben Seite bewegen, eine Kraft, welche die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers zu vermindern und die des gestoßenen Körpers zu vermehren strebt. Ist nun f_1 die Abnahme, welche die Geschwindigkeit des ersteren Körpers für jede Sekunde in irgend einem Augenblicke des Stoßes erleiden würde, wenn der Druck zwischen den Körpern von jenem Augenblicke an konstant bliebe, (§. 94); so ist $\frac{W_1}{g} f_1$ die bewegende oder wirksame Kraft des Körpers W_1 (§. 95), und wenn f_2 unter denselben Umständen die Zunahme bezeichnet, welche die Geschwindigkeit des zweiten Körpers für jede Sekunde empfangen würde; so ist $\frac{W_2}{g} f_2$ die wirksame Kraft des Körpers W_2. Da die beiden Körper als ein einziges System von Körpern angesehen werden können; so folgt aus dem d'Alembertschen Prinzipe (§. 103), daß wenn die obigen wirksamen Kräfte in Richtungen auf die Körper angebracht gedacht werden, welche denjenigen Richtungen gerade entgegengesetzt sind, in welchen resp. die Verzögerung und Beschleunigung stattfindet, dieselben mit den übrigen auf das System angebrachten Kräften im Gleichgewichte sein müssen. Da nun die gegenseitigen Pressungen zwischen beiden Körpern in jedem Augenblicke einander gleich und entgegengesetzt sind, sodaß zwischen diesen

Kräften fortwährend Gleichgewicht besteht, und nach der Voraussetzung keine anderweitigen Kräfte auf die Körper angebracht sind; so hat man

$$\frac{W_1}{g} f_1 = \frac{W_2}{g} f_2 \quad \ldots \quad (704)$$

Bezeichnet man jetzt mit $\triangle t$ ein ungemein kleines Inkrement der Zeit, vom Anfange des Stoßes an gerechnet, und mit $\triangle v_1$ und $\triangle v_2$ resp. die Abnahme und Zunahme der Geschwindigkeit der beiden Körper während jenes sehr kleinen Zeitraumes; so hat man nach §. 95

$$f_1 \triangle t = \triangle v_1 \text{ und } f_2 \triangle t = \triangle v_2;$$

mithin wegen Gleichung (704)

$$W_1 . \triangle v_1 = W_2 . \triangle v_2 .$$

Da diese Gleichheit für alle ungemein kleinen Zeitinkremente vom ersten Anfange des Stoßes an bis zu dem Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindet, und der gesammte Verlust an Geschwindigkeit des Körpers W_1 während jener Periode gleich $V_1 - V$ und der gesammte Gewinn an Geschwindigkeit des Körpers W_2 gleich $V - V_2$ ist; so folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$W_1 (V_1 - V) = W_2 (V - V_2) \quad \ldots \quad (705).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß sich beide Körper nach derselben Seite bewegten. Wären ihre ursprünglichen Richtungen V_1 und V_2 nach entgegengesetzten Seiten gekehrt, und fände die gemeinschaftliche Bewegung im Augenblicke der größten Zusammendrückung in der Richtung des Körpers W_1 statt; so ist der ganze Verlust an Geschwindigkeit des Körpers W_1 nach wie vor durch $V_1 - V$ dargestellt; die Summe der Abnahme der Geschwindigkeit des Körpers W_2 in der unsprünglichen Richtung seiner Bewegung bis zu dem Werthe null und der Zunahme der Geschwindigkeit desselben Körpers in entgegengesetzter Richtung bis zu dem Werthe V ist aber $V_2 + V$; man hat demnach für diesen Fall nach der allgemeinen Gleichung $W_1 . \triangle v_1 = W_2 . \triangle v_2$, welche auch hier für die ganze Periode des Stoßes bis zu der größten Zusammendrückung gelten muß,

$$W_1 (V_1 - V) = W_2 (V_2 + V).$$

Löſ't man die beiden letzteren Gleichungen für V auf; so erhält man

$$V = \frac{W_1 V_1 \pm W_2 V_2}{W_1 + W_2}, \ldots . \quad (706)$$

worin das obere Zeichen + oder das untere Zeichen — zu nehmen ist, jenachdem die Bewegungen der beiden Körper in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen stattfanden. Man könnte für beide Fälle bloß das obere Zeichen beibehalten, wenn man die Richtung der Bewegung des Körpers W_1 als die positive ansähe, und demnach unter V_2 eine positive oder negative Größe verstände, jenachdem diese Geschwindigkeit in derselben oder in entgegengesetzter Richtung der Geschwindigkeit V_1 erfolgte.

Wenn der zweite Körper vor dem Stoße in Ruhe war; so hat man $V_2 = 0$ und

$$V = \frac{W_1 V_1}{W_1 + W_2} \ldots . \quad (707).$$

Wenn beide Körper ein gleiches Gewicht haben; so ergibt die Gleichung (706)

$$V = \tfrac{1}{2} (V_1 \pm V_2).$$

Der Beweis des vorstehenden Satzes ist von jeder Hypothese, wie der Natur der aufeinanderstoßenden Körper oder ihren elastischen Eigenschaften, ganz unabhängig; derselbe gilt also für alle Körper, welches auch ihr Grad von Härte oder Elastizität sei, vorausgesetzt nur, daß im Augenblicke der größten Zusammendrückung ein jedes Massentheilchen der beiden Körper an der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit derselben Theil nimmt, sodaß keine relativen oder vibrirenden Bewegungen der Theilchen eines jeden Körpers stattfinden.

§. 439. Bestimmung der Arbeit, welche auf die Hervorbringung des Zustandes der größten Zusammendrückung der beiden Körper verwendet wird.

Die gesammte Arbeit, welche in den beiden Körpern vor dem Stoße angehäuft ist, wird durch $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}V_2{}^2$ dargestellt, und die gesammte Arbeit, welche im Zustande der größten Zusammendrückung, wo sich dieselben mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V bewegen, in ihnen angehäuft ist, durch $\frac{1}{2}\frac{W_1+W_2}{g}V^2$. Der Unterschied zwischen den Beträgen an angehäufter Arbeit der Körper in diesen beiden Zuständen der Bewegung ist dazu verwendet, um ihre Zusammendrückung hervorzubringen. Bezeichnet man diesen Aufwand an Arbeit mit u; so hat man

$$u = \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}V_2{}^2 - \frac{1}{2}\frac{W_1+W_2}{g}V^2,$$

oder wenn man für V den Werth aus Gleichung (706) substituirt und gehörig reduzirt,

$$u = \frac{1}{2g}\left(\frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2}\right)(V_1 \mp V_2)^2 \quad \ldots \quad (708)$$

Da bei unelastischen Körpern die Geschwindigkeit nach dem Stoße gleich der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V (Gleichung 707) im Zustande der größten Zusammendrückung ist; so stellt der vorstehende Ausdruck den Betrag an Arbeit dar, welcher bei solchen Körpern durch den Stoß stets verloren geht.

Wenn das Gewicht W_2 des Einen Körpers im Vergleich zu dem Gewichte W_1 des anderen Körpers ungemein groß ist; so reduzirt sich die obige Formel auf

$$u = \frac{W_1}{2g}(V_1 \mp V_2)^2 \quad \ldots \quad (709)$$

Jenachdem sich die Körper vor dem Stoße nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten bewegten, ist in diesen Ausdrücken das obere oder das untere Zeichen zu nehmen.

§. 440. Bestimmung der Geschwindigkeiten zweier vollkommen elastischer Körper nach dem Stoße.

Wenn die aufeinanderstoßenden Körper vollkommen elastisch sind; so leuchtet ein, daß sie nach dem Augenblicke der größten Zusammendrückung in Folge der Wiederausdehnung ihrer Oberflächen gegenseitige Pressungen aufeinander ausüben werden, welche in ähnlichen Lagen der Oberflächen genau denen gleich sind, welche dieselben während der Zeit der Zusammendrückung auszuhalten hatten. Hieraus folgt, daß die Dekremente der Geschwindigkeit desjenigen Körpers, dessen Bewegung durch diese Ausdehnung der Oberflächen verzögert wird, und die Inkremente der Geschwindigkeit des anderen Körpers, dessen Bewegung hierdurch beschleunigt wird, denen gleich sein werden, welche ein jeder Körper vorher bei dem Durchgange durch ähnliche Lagen erlitt, und daß mithin die gesammte Abnahme und Zunahme der Geschwindigkeit während der ganzen Ausdehnung der Abnahme und Zunahme während der ganzen Zusammendrückung gleich sein wird.

Nun ist die von dem Körper W_1 während der Zusammendrückung verlorene Geschwindigkeit gleich $V_1 - V$, und demnach auch die während der Ausdehnung oder während der Zeit vom Augenblicke der größten Zusammendrückung bis zum Augenblicke der Trennung der beiden Körper nach beendigtem Stoße von demselben verlorene Geschwindigkeit gleich $V_1 - V$. Da aber im Momente der größten Zusammendrückung beide Körper die Geschwindigkeit V besaßen; so ist die Geschwindigkeit v_1 des Körpers W_1 nach dem Stoße gleich $V - (V_1 - V) = 2V - V_1$. In ähnlicher Weise ist die von dem Körper W_2 während der Zusammendrückung und demnach auch während der Ausdehnung gewonnene Geschwindigkeit gleich $V \mp V_2$; mithin die Geschwindigkeit v_2 dieses Körpers im Augenblicke der Trennung oder nach dem Stoße gleich $V + (V \mp V_2) = 2V \mp V_2$, worin das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung der beiden Körper vor dem Stoße in derselben oder in entgegengesetzten Richtungen stattfand.

Substituirt man in diese Ausdrücke für V seinen Werth aus Gleichung (706); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$v_1 = \frac{(W_1 - W_2) V_1 \pm 2 W_2 V_2}{W_1 + W_2} \quad \ldots \quad (710)$$

$$v_2 = \frac{\mp (W_1 - W_2) V_2 + 2 W_1 V_1}{W_1 + W_2} \quad \ldots \quad (711)$$

Wenn die Körper vollkommen elastisch und an Gewicht einander gleich sind; so erhält man $v_1 = \pm V_2$ und $v_2 = V_1$. Dieselben tauschen also in Folge des Stoßes ihre Geschwindigkeiten um, und wenn der Eine von beiden vor dem Stoße in Ruhe war; so wird der andere nach dem Stoße in Ruhe kommen.

Wenn das Gewicht des Körpers W_2 im Vergleich zu dem des Körpers W_1 ungemein groß ist; so erhält man

$$v_1 = -V_1 \pm 2 V_2 \text{ und}$$

$$v_2 = \pm V_2.$$

In diesem Falle wird die Geschwindigkeit v_1 des kleineren Körpers nicht allein dann ihre Richtung in die entgegengesetzte umändern, wenn beide Körper in entgegengesetzter Richtung aufeinander stoßen, sondern auch schon dann, wenn bei einer Bewegung der Körper in derselben Richtung $2 V_2 < V_1$ ist. Wenn man in den letzten beiden Formeln $V_2 = 0$ setzt; so entsprechen dieselben dem Falle, wo der Körper W_1 gegen ein festes Hinderniß stößt.

§. 441. Bestimmung der Geschwindigkeiten zweier unvollkommen elastischer Körper nach dem Stoße.

Wenn die Elastizität der Körper unvollkommen ist; so werden ihre Oberflächen kein Bestreben haben, nach der Zusammendrückung genau in die frühere Form zurückzukehren, oder wenn auch ein solches Streben vorhanden sein sollte; so werden die gegenseitigen Pressungen, welche die Körper in den verschiedenen Lagen ihrer Oberflächen bei der Wiederausdehnung aufeinander ausüben, von denen verschieden sein, welche sie in der entsprechenden Lage der Oberflächen bei der Zusammendrückung äußerten. Bei dieser letzteren Voraussetzung könnten die Oberflächen zwar ihre frühere Form während der sehr kurzen Dauer des Stoßes, d. h. während der Zeit, daß die Körper noch nicht von=

einander getrennt sind, wirklich wieder aufnehmen, aber die Rückkehr in diese Form würde mit schwächeren Wirkungen auf die Körper verbunden sein, als die Zusammendrückung; es könnte sich jedoch auch ereignen, daß die vollständige Rückkehr in die ursprüngliche Form erst nach dem Stoße, oder nach der Trennung der Körper voneinander erfolgte.

In allen diesen Fällen, welche den Zustand der unvollkommenen Elastizität der Körper bezeichnen, kann man annehmen, daß die gesammten Abnahmen oder Zunahmen der Geschwindigkeit der beiden Körper während der Zusammendrückung und der Ausdehnung in dem Verhältnisse 1: e zueinander stehen.

Nun ist der Verlust an Geschwindigkeit des Körpers W_1 während der Zusammendrückung unter allen Umständen gleich $V_1 - V$, und mithin der während der Ausdehnung gleich $e(V_1 - V)$, sodaß man $v_1 = V - e(V_1 - V) = (1+e)V - eV_1$ hat. In ähnlicher Weise ist der Gewinn an Geschwindigkeit des Körpers W_2 während der Zusammendrückung unter allen Umständen gleich $V \mp V_2$, und mithin der während der Ausdehnung gleich $e(V \mp V_2)$, sodaß man $v_2 = V + e(V \mp V_2) = (1+e)V \mp eV_2$ hat. Substituirt man hierin für V seinen Werth aus Gleichung (706); so erhält man

$$v_1 = \frac{(W_1 - eW_2)V_1 \pm (1+e)W_2 V_2}{W_1 + W_2} \quad \ldots\ldots (712)$$

$$v_2 = \frac{\mp(eW_1 - W_2)V_2 + (1+e)W_1 V_1}{W_1 + W_2} \quad \ldots\ldots (713).$$

In diesen Formeln hat man die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen, jenachdem sich die Körper vor dem Stoße in derselben oder in entgegengesetzten Richtungen bewegten. Dieselben finden unmittelbar auf den Fall der vollkommen elastischen Körper Anwendung, wenn man darin $e = 1$ setzt, und auf den Fall der unelastischen Körper, wenn man $e = 0$ setzt.

§. 442. **Bestimmung der angehäuften Arbeit oder der Hälfte der lebenden Kraft, welche der Eine von zwei aufeinanderstoßenden Körpern durch den Stoß verliert und der andere gewinnt.**

Die lebende Kraft, welche der Körper W_1 während des Stoßes verliert, ist $\frac{W_1}{g} V_1^2 - \frac{W_1}{g} v_1^2 =$

$$\frac{W_1}{g}(V_1^2 - v_1^2) = \frac{W_1}{g}[V_1^2 - ((1+e)V - e V_1)^2] =$$

$$\frac{W_1}{g}[(1-e^2)V_1^2 + 2e(1+e)V V_1 - (1+e)^2 V^2] =$$

$$\frac{W_1}{g}(1+e)(V_1 - V)[(1-e)V_1 + (1+e)V].$$

Substituirt man hierin für V seinen Werth aus Gleichung (706) und stellt durch u_1 die Hälfte der lebenden Kraft dar, welche der Körper W_1 durch den Stoß verloren hat, oder auch den Betrag, um welchen seine angehäufte Arbeit in Folge des Stoßes vermindert ist; so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$u_1 = \frac{(1+e)W_1W_2(V_1 \mp V_2)}{2g(W_1+W_2)^2}[2W_1V_1 + (1-e)W_2V_1 \pm (1+e)W_2V_2] \quad \ldots . (714)$$

Ebenso erhält man, wenn u_2 die Hälfte der von dem Körper W_2 gewonnenen lebenden Kraft oder den Betrag bezeichnet, um welchen sich dessen angehäufte Arbeit durch den Stoß vermehrt hat,

$$u_2 = \pm\frac{(1+e)W_1W_2(V_1 \mp V_2)}{2g(W_1+W_2)^2}[2W_2V_2 + (1-e)W_1V_2 \pm (1+e)W_1V_1] \quad \ldots . (715)$$

§. 443. Wenn u den gesammten Betrag an angehäufter Arbeit bezeichnet, welchen beide Körper durch den Stoß verloren haben; so ist derselbe offenbar gleich der Differenz $u_1 - u_2$ zwischen der von dem Einen Körper verlorenen und der von dem anderen Körper gewonnenen Arbeit. Hierdurch ergibt sich wegen der letzten beiden Gleichungen

$$u = \frac{(1-e^2)W_1W_2(V_1 \mp V_2)^2}{2g W_1 + W_2)} \quad \ldots . (716)$$

Dieser Ausdruck ist auch gleich der Hälfte der lebenden Kraft, welche durch den Stoß der beiden Körper verloren gegangen ist.

Wenn die Körper vollkommen elastisch sind; so hat man $e = 1$ und $u = 0$. In diesem Falle findet also in Folge des Stoßes kein wirklicher Verlust an lebender Kraft statt, indem Alles, was der Eine der beiden Körper daran verliert, von dem andern aufgenommen wird.

§. 444. Bei den vorhergehenden Sätzen ist immer angenommen, daß sich der Bewegung der aufeinanderstoßenden Körper während der ganzen Dauer des Stoßes keine Widerstände irgend einer Art entgegensetzen. In der Praxis gibt es keinen Fall, wo diese Bedingung vollkommen erfüllt würde. Es leuchtet jedoch ein, daß wenn der Widerstand, welcher sich der Bewegung eines jeden Körpers entgegensetzt, im Vergleich zu dem Drucke, welcher sich in irgend einem Augenblicke des Stoßes zwischen den Körpern äußert, gering ist, alle Umstände des Stoßes in der obigen Weise vor sich gehen und die Bewegungen der Körper nach dem Stoße sehr nahe dieselben sein werden, als wenn kein Widerstand vorhanden gewesen wäre.

Will man dergleichen Widerstände P_1 und P_2, welche sich der Bewegung der Körper W_1 und W_2 während des Stoßes entgegensetzen, mit in Rechnung ziehen; so kann Dies auf folgende Weise geschehen. Wenn f_1 die Abnahme bezeichnet, welche die Geschwindigkeit des Körpers W_1 in irgend einem Augenblicke des Stoßes für die Sekunde erleidet; so ist $\frac{W_1}{g} f_1$ die wirksame Kraft dieses Körpers. Ebenso ist $\frac{W_2}{g} f_2$ die wirksame Kraft des Körpers W_2, wenn f_2 die Zunahme bezeichnet, welche die Geschwindigkeit dieses Körpers in demselben Augenblicke des Stoßes für die Sekunde empfängt. Diese Kräfte, in entgegengesetzten Richtungen genommen, müssen sich nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit den übrigen auf die beiden Körper angebrachten Kräften P_1 und P_2 im Gleichgewichte erhalten. Beachtet man nun, daß der Widerstand P_1 in derselben Richtung wirkt, wie die wirksame Kraft $\frac{W_1}{g} f_1$ des ersten Körpers (welche hier eine verzögernde ist) während der Widerstand P_2 in entgegengesetzter

Richtung der wirksamen Kraft $\frac{W_2}{g} f_2$ des zweiten Körpers wirkt (welche hier, wo die Bewegungen der beiden Körper vor dem Stoße, als nach Ein und derselben Seite gekehrt, angenommen werden, eine beschleunigende ist); so hat man

$$\frac{W_1}{g} f_1 - P_1 = \frac{W_2}{g} f_2 + P_2$$

oder

$$\frac{W_1}{g} f_1 - \frac{W_2}{g} f_2 = P_1 + P_2.$$

Bezeichnet man mit v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Körper W_1 und W_2 in irgend einem Augenblicke des Stoßes vor dem Momente der größten Zusammendrückung oder am Ende der Zeit t; so hat man (Gleichung 72) weil hier die Bewegung des Körpers W_1 verzögert und die des Körpers W_2 beschleunigt wird, $f_1 = -\frac{dv_1}{dt}$ und $f_2 = \frac{dv_2}{dt}$, mithin

$$-\frac{W_1}{g} \frac{dv_1}{dt} - \frac{W_2}{g} \frac{dv_2}{dt} = P_1 + P_2.$$

Multiplizirt man jetzt mit dt, integrirt alsdann zwischen den Gränzen $t = o$ und $t = T$, wobei T die Dauer des Stoßes vom ersten Zusammentreffen der Körper bis zum Augenblicke der größten Zusammendrückung bezeichnet, und beachtet, daß für $t = o$ $v_1 = V_1$ und $v_2 = V_2$ und für $t = T$ $v_1 = v_2 = V$ ist; so erhält man

$$-\frac{W_1}{g}(V - V_1) - \frac{W_2}{g}(V - V_2) = \int_0^T (P_1 + P_2) dt$$

oder

$$\frac{W_1}{g}(V_1 - V) = \frac{W_2}{g}(V - V_2) + \int_0^T (P_1 + P_2) dt.$$

Sind nun die Widerstände P_1 und P_2 nicht ungemein groß; so ist der Werth des Integrales auf der rechten Seite dieser Gleichung im Verhältnisse zu den übrigen Gliedern sehr klein, und kann vernachlässigt werden. Die vorstehende Gleichung wird alsdann identisch mit der Gleichung (705).

§. 445. Als eine Erläuterung des Prinzipes im vorhergehenden Paragraphe werde verlangt, den Raum zu bestimmen, um welchen ein Nagel durch den Schlag eines Hammers in irgend eine Substanz eingetrieben wird. Nehmen wir hierbei an, der Widerstand, welcher sich der Bewegung des Nagels entgegensetzt, bestehe zum Theil in einem konstanten Widerstande, der an der Spitze des Nagels überwunden werden muß, und zum Theil in der Reibung, welche die umgebende Substanz auf seine Seitenflächen ausübt, und welche in geradem Verhältnisse mit der Länge x des zu irgend einer Zeit eingetriebenen Theiles des Nagels wächst. Bezeichnet man demnach die Größe des Widerstandes in irgend einem Augenblicke mit $\alpha+\beta x$; so wird die Arbeit, welche verwendet werden muß, um den Nagel bis zu der Tiefe l einzutreiben (§. 51) durch

$$\int_0^l (\alpha+\beta x)\,dx=\alpha l+\tfrac{1}{2}\beta l^2$$

dargestellt sein.

Ist nun W_1 das Gewicht und V_1 die Geschwindigkeit des Hammers vor dem Schlage, W_2 das Gewicht des vor dem Schlage in Ruhe befindlichen Nagels, und nimmt man die Masse des Hammers und die des Nagels als unelastisch an; so wird die in dem Hammer vor dem Stoße angehäufte Arbeit gleich $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1^2$ sein. Durch die Zusammendrückung der Berührungsfläche des Hammers und des Nagels geht nach Gleichung (716) oder (708) bloß in Folge des Stoßes die Arbeit $\frac{1}{2g}\left(\frac{W_1 W_2}{W_1+W_2}\right)V_1^2$ verloren, und es bleibt demnach als wirksame Arbeit zum Eintreiben des Nagels der Betrag $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1^2-\frac{1}{2g}\left(\frac{W_1 W_2}{W_1+W_2}\right)V_1^2$ übrig. Da diese Arbeit gerade hinreichen soll, um den Nagel bis zur Tiefe l einzutreiben; so hat man

$$\frac{1}{2g} W_1 V_1{}^2 - \frac{1}{2g}\left(\frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2}\right) V_1{}^2 = \alpha l + \tfrac{1}{2}\beta l^2$$

oder

$$\frac{W_1 V_1{}^2}{g(W_1 + W_2)} = 2\alpha l + \beta l^2 \quad \ldots \quad (717).$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich die gesuchte Tiefe l, um welche der Nagel durch den Schlag eines Hammers bei einer anfänglichen Geschwindigkeit gleich V_1 eingetrieben werden kann.

§. 446. Zwei prismatische Körper haben eine gemeinschaftliche Axe; das Eine Ende des ersten ist gegen eine feste Fläche gestützt, und das andere Ende empfängt den Stoß durch den zweiten Körper: es soll die Zusammendrückung eines jeden unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß die Gränzen der vollkommenen Elastizität bei dem Stoße nicht überschritten werden.

Es sei

W_1 das Gewicht des stoßenden Prismas und

V_1 dessen Geschwindigkeit vor dem Stoße,

L_1 und L_2 die respektiven Längen der beiden Prismen vor der Zusammendrückung,

K_1 und K_2 ihre Querschnitte,

l_1 und l_2 die größten durch den Stoß hervorgebrachten Zusammendrückungen derselben,

E_1 und E_2 ihre Elastizitätsmodel,

P der Druck zwischen beiden Prismen im Augenblicke der größten Zusammendrückung.

Setzt man nun voraus, daß die Zusammendrückungen der Prismen im Verhältnisse zu ihren Längen nur unbedeutend seien (cf. die Schlußbemerkung zu §. 353); so hat man nach Gleichung 491 für die Beträge von Arbeit, welche auf dieselben verrichtet sein müssen, um jene Zusammeudrückungen zu bewirken, resp.

$$\tfrac{1}{2}\frac{K_1 E_1 l_1{}^2}{L_1} \text{ und } \tfrac{1}{2}\frac{K_2 E_2 l_2{}^2}{L_2}$$

und demnach für die gesammte hierzu verwendete Arbeit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{K_1 E_1 l_1^2}{L_1} + \frac{K_2 E_2 l_2^2}{L_2}\right) \text{*)}.$$

Diese Arbeit ist nun durch den stoßenden Körper geleistet, und die gesammte, vor dem Stoße in demselben angehäufte Arbeit $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g} V_1^2$ (§. 66) ist dabei erschöpft. Demzufolge hat man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{K_1 E_1 l_1^2}{L_1} + \frac{K_2 E_2 l_2^2}{L_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{W_1}{g} V_1^2.$$

Ferner sind die gegenseitigen Pressungen zwischen den beiden Körpern in einem jeden Augenblicke des Stoßes einander gleich, und da dieselben im Momente der größten Zusammendrückung resp. durch $\frac{K_1 E_1 l_1}{L_1}$ und $\frac{K_2 E_2 l_2}{L_2}$ (Gleichung 490) dargestellt sind; so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{K_1 E_1 l_1}{L_1} = \frac{K_2 E_2 l_2}{L_2} = P \quad \ldots. \quad (718).$$

Eliminirt man zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung Ein Mal die Größe l_2 und Ein Mal die Größe l_1; so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$l_1 = \frac{L_1 V_1}{K_1 E_1} \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{g\left(\frac{L_2}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)}} \quad \ldots. \quad (719)$$

$$l_2 = \frac{L_2 V_1}{K_2 E_1} \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{g\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)}} \quad \ldots. \quad (719^a)$$

---

*) Hierbei ist der Begriff von Arbeit und einfacher Kraft wohl zu unterscheiden. Ein und derselbe Druck an dem äußersten Ende des zweiten Prismas angebracht, würde gleichzeitig die Zusammendrückungen l_1 und l_2 der beiden Prismen erzeugen. Die Arbeit aber, welche dieser Druck verrichten muß, um jenen Effekt hervorzubringen, ist gleich der Summe der Arbeiten, welche auf die Zusammendrückung eines jeden einzelnen Prismas verwendet werden müssen.

$$P = \frac{V_1 \sqrt{W_1}}{\sqrt{g\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{L_2 E_2}\right)}} \quad \ldots \ldots (720).$$

In diesen Ausdrücken bezeichnet l_1 und l_2 resp. die größte Zusammendrückung des Prismas, dessen Querschnitt K_1 oder K_2 ist, und P den Druck, welcher zwischen beiden Prismen im Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindet.

§. 447. Der gegenseitige Druck P zwischen den beiden Prismen in irgend einem Augenblicke des Stoßes.

Wenn l den Raum bezeichnet, welchen zu irgend einer Zeit dasjenige Ende des stoßenden Prismas beschrieben hat, welches den Stoß nicht vollführt; so leuchtet ein, daß derselbe gleich der Summe der beiden entsprechenden Zusammendrückungen der beiden Prismen zu derselben Zeit ist. Stellt man die letzteren daher durch l_1 und l_2 dar; so hat man $l = l_1 + l_2$. Nach Gleichung (718), welche sich nicht allein auf den Augenblick der größten Zusammendrückung, sondern auf einen jeden beliebigen Moment des Stoßes bezieht, hat man aber $l_1 = \frac{P E_1}{K_1 L_1}$ und $l_2 = \frac{P L_2}{K_2 E_2}$;

mithin $l = P\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)$ und

$$P = \frac{l}{\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}} \quad \ldots \ldots (721).$$

§. 448. Ein Maaß für die Zusammendrückbarkeit der Prismen.

Wenn λ den Raum darstellt, welchen das freie Ende des stoßenden Prismas, mit welchem dasselbe den Stoß nicht vollführt in dem Augenblicke beschrieben haben wird, wo der Druck zwischen beiden Prismen 1 Pfund beträgt, oder mit anderen Worten, wenn λ die gesammte Länge bezeichnet, um welche beide Prismen durch den Druck von Einem Pfunde zusammengedrückt werden würden; so hat man nach der vorstehenden Gleichung

$$\lambda = \frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2} \quad \ldots \quad (722).$$

Die Größe λ kann als ein Maaß der gesammten Zusammendrückbarkeit der beiden Prismen angesehen werden, indem dieselbe den Raum darstellt, um welchen die Endpunkte der Prismen durch den Druck von Einem Pfunde einander näher gerückt werden.

Wenn λ_1 und λ_2 die Längen darstellen, um welche resp. das Eine und das andere Prisma durch den Druck von Einem Pfunde verkürzt wird; so hat man $\lambda_1 = \frac{L_1}{K_1 E_1}$ und $\lambda_2 = \frac{L_2}{K_2 E_2}$; mithin $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, d. h. die gesammte Zusammendrückbarkeit der beiden Prismen ist gleich der Summe ihrer einzelnen Zusammendrückbarkeiten.

§. 449. Betrag der Arbeit u, welche auf die Zusammendrückung der Prismen in irgend einem Augenblicke des Stoßes verwendet ist.

Wenn die Größen l, l_1, l_2 und P die Bedeutungen aus §. 447 haben und sich demnach auf einen beliebigen Augenblick des Stoßes beziehen; so ist die auf die Zusammendrückung l_1 verwendete Arbeit gleich $\frac{1}{2}\frac{K_1 E_1}{L_1} l_1^{\,2}$, oder wenn man darin für l_1 den Werth aus Gleichung (718) substituirt, gleich $\frac{1}{2}\frac{L_1}{K_1 E_1} P^2$. Ebenso ist die auf die Zusammendrückung l_2 verwendete Arbeit gleich $\frac{1}{2}\frac{L_2}{K_2 E_2} P^2$, und mithin die ganze Arbeit u, welche zur Hervorbringung der gesammten Zusammendrückung $l = l_1 + l_2$ erforderlich ist, $u = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right) P^2$, oder wenn man für P seinen Werth aus Gleichung (721) setzt,

$$u = \frac{\frac{1}{2} l^2}{\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}} = \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{\lambda} \quad \ldots \quad (723).$$

§. 450. **Die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers in irgend einem Augenblicke, unter der Voraussetzung, daß der Stoß in vertikaler Richtung stattfinde.**

Es leuchtet ein, daß in irgend einem Augenblicke des Stoßes, wo die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers gleich v_1 ist, auf die Zusammendrückung der beiden Körper ein Betrag an Arbeit verwendet ist, welcher durch die in dem stoßenden Körper vor dem Stoße angehäufte Arbeit, plus der von der Schwere während des Stoßes mitgetheilten Arbeit, weniger der in dem Körper noch verbleibenden Arbeit, d. i. durch $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1^2 + W_1 l - \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v_1^2$ dargestellt wird.

Bezeichnet man daher die auf die Zusammendrückung der beiden Körper verwendete Arbeit mit u; so hat man $\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1^2 + W_1 l - \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v_1^2 = u$, und wenn man hierin für u seinen Werth aus Gleichung (723) substituirt,

$$\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}V_1^2 + W_1 l - \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v_1^2 = \frac{\frac{1}{2}l^2}{\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}}.$$

Hieraus folgt

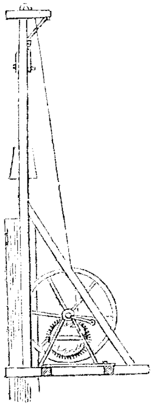
$$v_1^2 = V_1^2 + 2gl - \frac{gl^2}{W_1\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)}, \quad \ldots \quad (724)$$

oder wenn man für l seinen Werth in P aus Gleichung (721) setzt,

$$v_1^2 = V_1^2 - g\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)\left(\frac{P^2}{W_1} - 2P\right) \quad \ldots \quad (725).$$

Die Ramme.

§. 451. Wenn ein Pfahl vermittelst einer Ramme in ein widerstehendes Erdreich eingetrieben werden soll; so leuchtet ein, daß derselbe nicht eher anfangen wird zu ziehen, als bis in der Dauer des



Stoßes ein Augenblick erreicht ist, wo der Druck des Rammklotzes auf den Kopf des Pfahles, zusammen mit dem Gewichte des Pfahles, den Widerstand überschreitet, welcher sich in Folge der Kohäsion und der Reibung der Erdmasse der Bewegung des Pfahles entgegensetzt. Dieser Widerstand sei Q und es bezeichne V_1 die Geschwindigkeit des Klotzes im Anfange des Stoßes, v_1 die Geschwindigkeit desselben in dem Augenblicke, wo der Pfahl anfängt zu ziehen, W_1 das Gewicht des Klotzes und W_2 das des Pfahles.

Da der Pfahl während der ganzen zwischen den Geschwindigkeiten V_1 und v_1 des Rammklotzes liegenden Periode des Stoßes in Ruhe bleibt, und der gegenseitige Druck P zwischen dem Klotze und dem Pfahle im Augenblicke der eintretenden Bewegung des Letzteren gleich $Q-W_2$ ist; so hat man nach Gleichung (725)

$$v_1{}^2 = V_1{}^2 - g\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)\left[\frac{(Q-W_2)^2}{W_1} - 2(Q-W_2)\right] \ldots\ldots (726).$$

Wenn der durch diese Gleichung bestimmte Werth von v_1 keine positive Größe liefert; so kann dem Pfahle keine Bewegung durch den Stoß des Rammklotzes mitgetheilt werden. Damit der Pfahl also eingetrieben werden könne, muß zwischen den gegebenen Größen folgende Beziehung stattfinden

$$V_1{}^2 > g\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)\left[\frac{(Q-W_2)^2}{W_1} - 2(Q-W_2)\right] \ldots\ldots (727).$$

Nachdem sich der Pfahl durch irgend einen gegebenen Raum bewegt hat, wird Ein Theil der in dem Rammklotze vor dem Stoße angehäuft gewesenen Arbeit dazu verwendet sein, um durch jenen Raum den Widerstand zu überwinden, welcher sich der Bewegung des Pfahles entgegensetzt, ein anderer Theil wird auf die Zusammendrückung der Oberflächen des Rammklotzes und des Pfahles verbraucht sein, und der übrig bleibende Theil wird in den sich bewegenden Massen des Klotzes und Pfahles angehäuft sein.

Die Bewegung des Pfahles kann erst nach dem Augenblicke der größten Zusammdrückung des Klotzes und Pfahles ihr Ende erreichen, weil der Druck zwischen diesen beiden Körpern und demnach die treibende Kraft des Pfahles mit der Zusammendrückung fortwährend wächst.

Wenn nun die Oberflächen des Klotzes und Pfahles unelastisch sind, also im Augenblicke der größten Zusammendrückung kein Bestreben haben, in ihre frühere Form zurückzukehren; so werden sich die beiden Körper von jenem Zeitpunkte an mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit weiterbewegen und gleichzeitig zur Ruhe kommen, sodaß die ganze Arbeit, welche durch den Stoß nutzlos verloren geht, auf die Zusammendrückung der unelastischen Oberflächen des Rammklotzes und des Pfahles verwendet ist.

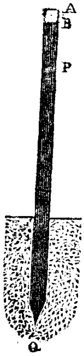
Wenn jedoch beide Oberflächen elastisch sind; so wird die des Klotzes aus der Lage der größten Zusammendrückung in die ursprüngliche zurückzukehren streben, und der Kloß selbst wird hierdurch eine relative Geschwindigkeit in Beziehung zu dem Pfahle erlangen, deren Richtung der Bewegung des Pfahles gerade entgegengesetzt ist. Bis nun der Klotz bei dieser Rückkehr in die ursprüngliche Form diejenige Lage angenommen hat, in welcher er zuerst anfing den Pfahl zu treiben, wird der Druck P zwischen Beiden den Widerstand Q überschreiten, und der Pfahl wird fortwährend getrieben werden. Nachdem der Klotz in jene Lage gekommen ist, wird der Pfahl auch ferner noch um einen gewissen Raum vordringen, indem er dabei von der Arbeit getrieben wird, welche während des Zeitraumes, wo $P > Q - W_2$ war, in ihm angehäuft ist. Wenn die Bewegung des Pfahles aufhört, wird der Rammklotz bei seiner Rückkehr in die unsprüngliche Form die Lage überschritten haben, in welcher er zuerst anfing, den Pfahl zu treiben. Hat der Klotz nun in demselben Augenblicke noch nicht diejenige Lage erreicht, in welcher sein Gewicht gerade durch die Elastizität der Berührungsflächen im Gleichgewichte erhalten wird; so wird derselbe fortwährend im Begriffe sein, relative Geschwindigkeit in Beziehung zu dem Pfahle zu erlangen, und wird demnach in Beziehung zu dem

Pfahle noch nicht zur Ruhe gekommen sein. Derselbe wird also in jenem Augenblicke, wo der Pfahl zur Ruhe kommt, noch eine gewisse Geschwindigkeit besitzen, und es wird ein gewisser Betrag an Arbeit in ihm angehäuft sein. Dieser Betrag an Arbeit, zusammen mit derjenigen Arbeit, welche verrichtet sein muß, um die in jenem Augenblicke stattfindende Zusammendrückung der Berührungsflächen zu erzeugen, wird in keinem Betracht zur Eintreibung des Pfahles beitragen und wird nutzlos verloren gehen. Hat der Klotz dagegen in dem Augenblicke, wo der Pfahl zur Ruhe kommt, bei seiner Rückkehr in die ursprüngliche Form die Lage überschritten, wo sein Gewicht gerade durch die Elastizität der Berührungsflächen im Gleichgewichte erhalten wird; so wird seine relative Geschwindigkeit in Beziehung zu dem Pfahle im Begriffe sein, sich zu vermindern, und es ist möglich, daß dieselbe sogar in dem Augenblicke null wird, wo die Bewegung des Pfahles aufhört. In diesem letzteren Falle, wo der Pfahl und der Klotz für einen Augenblick gleichzeitig zur Ruhe kommen, wird die ganze in dem stoßenden Körper angehäufte Arbeit zur Eintreibung des Pfahles nützlich verwendet sein, mit Ausnahme desjenigen Theiles, welcher zur Hervorbringung der in jenem Augenblicke verbleibenden Zusammendrückung der Berührungsflächen erforderlich ist, eine Zusammendrückung, welche offenbar geringer ist, als die dem Gewichte des Rammklotzes zukommende. Der letztere kann demnach als derjenige Fall angesehen werden, in welchem durch den Rammklotz das Maximum des Nutzeffektes erreicht wird. Der nachstehende Paragraph enthält eine analytische Untersuchung der vorstehenden Bedingungen unter ihrer allgemeinsten Form.

§. 452. Ein Prisma, welches von einem anderen gestoßen wird, ist in der Richtung seiner Axe beweglich, und seiner Bewegung ist ein konstanter Widerstand Q entgegengesetzt; es sollen die Bedingungen der Bewegung während der Dauer des Stoßes angegeben werden, wenn die bei dem Stoße obwaltenden Umstände denen des §s. 450 gleich sind.

Wenn f_1 und f_2 resp. die Abnahme oder Zunahme der Geschwindigkeit bezeichnet, welche das stoßende und das gestoßene Prisma in der Sekunde verlieren oder gewinnen würde, wenn die darauf wirkenden Kräfte in irgend einem Augenblicke konstant blieben (§. 95); so stellen $\frac{W_1}{g}f_1$ und $\frac{W_2}{g}f_2$ die wirksamen Kräfte der beiden Körper dar (§. 103) welche, wenn sie in entgegengesetzten Richtungen genommen werden, nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit den übrigen auf das System angebrachten Kräften im Gleichgewichte sein müssen.

Von dem Augenblicke nun, wo das Prisma PQ anfängt sich zu bewegen, oder wo sich die ursprüngliche Geschwindigkeit V_1 des stoßenden Prismas auf den Werth v_1 (Gleichung 726) reduzirt hat, sind die auf das System BQ der beiden Prismen angebrachten Kräfte gleich $(W_1 + W_2 - Q)$. Nimmt man die wirksamen Kräfte $\frac{W_1}{g}f_1$ und $\frac{W_2}{g}f_2$, von denen die erstere eine verzögernde ist und von unten nach oben wirkt, und die letztere eine beschleunigende ist und von oben nach unten wirkt, in entgegengesetzten Richtungen; so erhält man als Bedingung für das Gleichgewicht zwischen der Kraft $(W_1 + W_2 - Q)$ und den entgegengesetzten Kräften von $\frac{W_1}{g}f_1$ und $\frac{W_2}{g}f_2$



$$-\frac{W_1}{g}f_1 + \frac{W_2}{g}f_2 = W_1 + W_2 - Q \quad \ldots . \quad (728).$$

Ebenso sind die äußerlich auf das Prisma PQ angebrachten Kräfte $W_2 + P - Q$, worin P den gegenseitigen Druck zwischen den Prismen bei P bezeichnet. Man hat also auch für jenes Prisma die Gleichung

$$\frac{W_2}{g}f_2 = W_2 + P - Q \quad \ldots . \quad (729).$$

Nun sei A die Lage des Endpunktes B des stoßenden Prismas im ersten Augenblicke des Stoßes, x_1 der Raum, um welchen sich die Gesammtlänge BQ der beiden Prismen nach Verlauf der Zeit t vermindert hat, und x_2 der Raum, um welchen der Punkt

Q am Ende derselben Zeit vorgedrungen ist, wobei jedoch die Zeit t nicht vom Anfange des Stoßes, sondern von dem Augenblicke an gerechnet wird, wo die Geschwindigkeit des stoßenden Prismas gleich v_1 (Gleichung 726) ist. Alsdann hat man nach Gleichung (721)

$$P = \frac{x_1}{\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}} = \frac{x_1}{\lambda} \quad \ldots \; (730).$$

Ferner hat man $\overline{AB} = x_1 + x_2$, und demnach für die Geschwindigkeit des Punktes B oder auch für die Geschwindigkeit des Prismas BP, wenn man annimmt, die Zusammendrückung finde nur in der Nähe der Berührungsflächen P statt, $\frac{d(x_1 + x_2)}{dt}$. Ebenso hat man für die Geschwindigkeit des Punktes Q oder des Prismas PQ $\frac{dx_2}{dt}$. Beachtet man nun, daß hier f_1 eine Abnahme und f_2 eine Zunahme der von oben nach unten gerichteten Geschwindigkeiten der beiden Prismen bezeichnet; so hat man $-f_1 = \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2}$ und $f_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2}$; mithin $-f_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + f_2$.

Substituirt man diese Werthe von f_1 und P in die Gleichungen (728) und (729) und eliminirt f_2; so ergibt sich

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda}\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) x_1 + \frac{g Q}{W_2} \quad \ldots \; (731)$$

Integrirt man diese Gleichung nach bekannten Regeln; so erhält man

$$x_1 = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + \frac{g Q}{\alpha^2 W_2}, \quad \ldots \; (732)$$

worin

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{\lambda}\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)} = \sqrt{g \left(\frac{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}}{\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}} \right)} \; \ldots (733)$$

ist, und A und B gewisse Konstanten bezeichnen, welche durch die Bedingungen der Aufgabe noch näher zu bestimmen sind.

Substituirt man jetzt in Gleichung (729) für P seinen Werth aus Gleichung (730) und lös't für f_2 auf; so erhält man

$$f_2 = \frac{g}{\lambda W_2} x_1 - g\left(\frac{Q}{W_2} - 1\right) \ldots . (734)$$

Setzt man hierin für x_1 seinen Werth aus Gleichung (732) und für f_2 seinen Werth $\frac{d^2 x_2}{dx^2}$; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{A g}{\lambda W_2} \sin \alpha t + \frac{B g}{\lambda W_2} \cos \alpha t - g\left(\frac{Q}{W_1 + W_2} - 1\right).$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Gränzen 0 und t, indem man beachtet, daß für $t = 0$ die Geschwindigkeit $\frac{d x_2}{dt}$ des Prismas PQ gleich null ist; so erhält man

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{A g}{\alpha \lambda W_2}(1 - \cos \alpha t) + \frac{B g}{\alpha \lambda W_2} \sin \alpha t - g\left(\frac{Q}{W_1 + W_2} - 1\right) t.$$

Integrirt man nochmals zwischen denselben Gränzen; so ergibt sich

$$x_2 = \frac{A g}{\alpha^2 \lambda W_2}(\alpha t - \sin \alpha t) + \frac{B g}{\alpha^2 \lambda W_2}(1 - \cos \alpha t) - \tfrac{1}{2} g\left(\frac{Q}{W_1 + W_2} - 1\right) t^2 \ldots (735).$$

Da nun in dem Augenblicke, wo das zweite Prisma PQ zur Ruhe kommt, der Werth von $\frac{d x_2}{dt}$ aus der vorhergehenden Gleichung gleich null sein muß; so erhält man, wenn man den entsprechenden Werth von t mit T bezeichnet,

$$A(1 - \cos \alpha T) + B \sin \alpha T - \alpha \lambda W_2\left(\frac{Q}{W_1 + W_2} - 1\right) T = o \ldots (736).$$

Um jetzt die Konstanten A und B zu bestimmen, so bemerke man, daß die Bewegung des Prismas PQ nicht eher erfolgen kann, als bis der Druck P zwischen beiden Prismen, plus dem Gewichte W_2 des letzteren, gleich dem Widerstande Q ist, welcher sich der Bewegung desselben entgegensetzt. Dies geschieht nach der obigen Voraussetzung in dem Augenblicke, wo man $t = 0$

hat. Bezeichnet man nun den Werth von x_1 (d. i. die gesammte Zusammendrückung der beiden Prismen) in jenem Augenblicke mit c; so hat man für den gegenseitigen Druck zwischen den Prismen in demselben Momente (nach Gleichung 730) den Werth $\frac{c}{\lambda}$, und mithin $\frac{c}{\lambda} + W_2 = Q$ oder

$$c = \lambda (Q - W_2) = \left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 E_2}\right)(Q - W_2) \ldots (737).$$

Da sich ferner die Werthe $x_1 = c$ und $t = o$ in Gleichung (732) entsprechen müssen; so erhält man aus derselben $c = B + \frac{g\,Q}{\alpha^2 W_2}$, oder wenn man für c den vorstehenden Werth $\lambda(Q - W_2)$ und für α den Werth aus Gleichung (733) substituirt und gehörig reduzirt

$$B = \frac{g(Q - W_1 - W_2)}{\alpha^2 W_1} = \lambda W_2 \left(\frac{Q}{W_1 + W_2} - 1\right) \ldots . (738).$$

Solange der Endpunkt Q des gestoßenen Prismas in Ruhe ist, wird die ganze Bewegung des Punktes B durch die Zusammendrückung der beiden Prismen hervorgebracht, und die Geschwindigkeit dieses Punktes ist durch $\frac{dx_1}{dt}$ dargestellt. Nun beziehen sich zwar sämmtliche vorstehende Gleichungen, welche von der Zeit t abhängig sind, nur auf diejenige Periode des Stoßes, wo das gestoßene Prisma in Bewegung ist, weil nur für diese Periode der Widerstand Q als eine konstante, der Bewegung des Systemes entgegenwirkende Kraft angesehen werden kann; dieselben gelten aber noch für den Anfangspunkt dieser Periode, oder für $t = o$. Demnach muß der Werth von $\frac{dx_1}{dt}$, welcher sich durch Differenziation der Gleichung (732) ergibt, für $t = o$ dem Werthe v_1 aus Gleichung (726) entsprechen. Hierdurch erhält man $v_1 = \alpha A$ oder $A = \frac{v_1}{\alpha}$. Substituirt man diesen Werth von A und den vorhergehenden von B in Gleichung (736); so ergibt sich

$$\frac{v_1}{\alpha}(1-\cos\alpha T)+\lambda W_2\left(\frac{Q}{W_1+W_2}-1\right)\sin\alpha T-\alpha\lambda W_2\left(\frac{Q}{W_1+W_2}-1\right)T=o,$$

oder auch

$$\frac{v_1}{\alpha\lambda W_2\left(\frac{Q}{W_1+W_2}-1\right)}(1-\cos\alpha T)-(\alpha T-\sin\alpha T)=o \quad \ldots \quad (739).$$

Substituirt man ferner die Werthe von A und B in Gleichung (735) und bezeichnet den Werth von x_2 für $t=T$ mit D; so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$D=\frac{g}{\alpha^2}\left(\frac{Q}{W_1+W_2}-1\right)\times$$

$$\left\{\frac{v_1}{\alpha\lambda W_2\left(\frac{Q}{W_1+W_2}-1\right)}(\alpha T-\sin\alpha T)+1-\cos\alpha T-\tfrac{1}{2}(\alpha T)^2\right\}$$

$$\ldots \quad (740).$$

Wenn jetzt der durch Gleichung (739) bestimmte Werth von T oder αT in die Gleichung (740) gesetzt wird; so erhält man einen Ausdruck für den ganzen Raum D, um welchen das zweite Prisma durch den Stoß des ersten eingetrieben wird.

§. 453. Anwendung der vorstehenden Formeln.

Wenn ein Bauwerk, dessen gesammte Last R ist, auf n Pfählen errichtet werden soll; so hat ein jeder Pfahl die Last $\frac{1}{n}R$ zu tragen. Wird nun der Sicherheit wegen verlangt, daß ein jeder Pfahl im Stande sei, das $m$fache dieses Gewichtes zu tragen, ohne nachzugeben; so muß derselbe so fest eingerammt werden, daß das umgebende Erdreich seiner eventuellen Bewegung einen Widerstand $Q=\frac{m}{n}R$ entgegensetzen würde. Diese Festigkeit des Pfahles wird dadurch erreicht, daß man denselben tief genug einschlägt. In den Formeln der vorstehenden Paragraphe ist zwar der Widerstand Q des Erdreiches fortwährend als konstant betrachtet; man bemerkt jedoch, daß eine solche Annahme nur für die sehr kurze Dauer Eines Stoßes der Ramme Gültigkeit hat, daß aber bei einem jeden folgenden Stoße der Widerstand durch die vermehrte Reibung an der größeren Länge des eingetriebenen Theiles des Pfahles wachsen wird, selbst wenn sich die Dichtigkeit der Erdschichten, in welche der Fuß des Pfahles nach und nach zu stehen kommt, nicht ebenfalls vergrößerte.

Hiernach hat man also zuvörderst für Q den Werth $\frac{m}{n}$ R zu substituiren.

Um hierauf die Dimensionen des Rammklotzes und die Höhe zu bestimmen, von welcher derselbe herabfallen muß, um den Pfahl von gegebenen Dimensionen bis zu der verlangten Tragfähigkeit einzutreiben; so hat man, wenn H die Fallhöhe des Rammklotzes bezeichnet, zur Bestimmung der Geschwindigkeit V_1, mit welcher derselbe auf den Pfahl trifft, nach §. 47

$$V_1{}^2 = 2gH.$$

Substituirt man diesen Werth von $V_1{}^2$ in die Formel (727); so ergibt sich für die Beziehung, welche zwischen den Dimensionen des Klotzes und denen des Pfahles stattfinden muß,

$$H > \tfrac{1}{2}\left(\frac{L_1}{K_1 E_1} + \frac{L_2}{K_2 L_2}\right)\left[\frac{(Q - W_2)^2}{W_1} - 2(Q - W_2)\right].$$

Da nun die Werthe von Q und V_1 bekannt sind; so ergibt die Gleichung (726) den Werth der Geschwindigkeit v_1 des Rammklotzes in dem Augenblicke, wo der Pfahl anfängt zu ziehen. Setzt man die Werthe von Q und v_1, sowie die Werthe von λ und α, welche resp. durch die Gleichungen (722) und (733) bestimmt sind, in Gleichung (739); so kann man dieselbe durch irgend eine Näherungsmethode für T oder auch für αT auflösen.

Wird der hierdurch für αT erhaltene Werth in die Gleichung (740) substituirt; so erfährt man die Tiefe D, um welche der Pfahl bei dem letzten Schlage des Rammklotzes einsinken muß, um die verlangte Tragfähigkeit zu besitzen. Läßt man also den Pfahl so fest eintreiben, daß derselbe bei der letzten Hitze von 20 Schlägen noch um D Längeneinheiten für jeden Schlag, also um 20D Längeneinheiten für die ganze Hitze zieht; so leuchtet ein, daß derselbe bei den ersten Schlägen dieser Hitze um etwas mehr, und bei den letzten um etwas weniger, als D Längeneinheiten, einsinken, und demnach eine noch größere Tragfähigkeit erhalten wird, als gefordert wurde.

Bei der Berechnung der obigen Formeln können die Werthe der Elastizitätsmodel E und E_2 für das Material des Pfahles und des Rammklotzes unmittelbar aus der Tabelle am Ende dieses Werkes genommen werden, wenn man die Querschnitte K_1 und K_2 dieser Körper nach Quadratzollen mißt. Wollte man dieselben nach Quadratfußen messen, so hätte man $144 E_1$ und $144 E_2$ an die Stelle von E_1 und E_2 zu setzen. Die übrigen Längen L_1, L_2, h und D können in beiden Fällen nach einer beliebigen anderen Längeneinheit gemessen werden.

Um die Gleichung (739) für αT aufzulösen; so setze man der Kürze wegen $\dfrac{v_1}{a\lambda W_2\left(\dfrac{Q}{W_1+W_2}-1\right)}=a$ und $\alpha T=x$.

Konstruirt man alsdann nach der Gleichung

$$y=a(1-\cos x)-(x-\sin x)$$

eine Kurve, indem man für x beliebige Werthe substituirt, welche, von null anfangend, zu immer höheren Beträgen anwachsen; so ergibt diejenige Abszisse x, für welche die Kurve die Abszissenaxe durchschneidet, oder für welche $y=o$ wird, den gesuchten Werth der Größe αT. Man bemerkt, daß für $x=o$ auch $y=o$ ist. Da $\dfrac{dy}{dx}=a\sin x-(1-\cos x)$ ist, und auch der Werth von $\dfrac{dy}{dx}$ für $x=o$ null wird; so folgt, daß die Kurve die Absissenaxe im Anfangspunkte der Koordinaten berührt. Ferner folgt aus der Gleichung $\dfrac{d^2y}{dx^2}=a\cos x-\sin x$, welche für $x=o$ den positiven Werth a liefert, daß die Kurve im Anfangspunkte konvex ist, und sich demnach zu beiden Seiten dieses Punktes von der Abszissenaxe erhebt. Man findet leicht, daß die Ordirate y für jeden negativen Werth von x einen positiven Werth, verschieden von null, annimmt, sodaß es keinen negativen Werth für x geben kann, welcher der Bedingung $y=o$ ein Genüge leistet. Da endlich für $x=2\pi$ die Ordinate y den negativen Werth -2π annimmt, und auch für jeden größeren positiven Werth für x negativ bleibt; so folgt, daß die Kurve die Aszissenlinie nur Ein

Mal zwischen dem Anfangspunkte der Koordinaten und dem Endpunkte der Abszisse $x=2\pi$ durchschneidet, und daß mithin der gesuchte Werth von αT stets zwischen o und 2π liegen wird.

§. 454. Näherungswerthe für die auf das Rammen Bezug habenden Formeln.

Wenn man sowol die Substanz des Rammklotzes, wie die des einzutreibenden Pfahles als unelastisch ansieht; so vereinfacht sich die obige Untersuchung sehr und man erhält eine Näherungsformel auf folgendem Wege. Es sei wieder

W_1 und W_2 resp. das Gewicht des Rammklotzes und Pfahles,
H die Fallhöhe des Rammklotzes,
V_1 die Geschwindigkeit, mit welcher der Klotz auf den Pfahl trifft,
v_1 die gemeinschaftliche Geschwindigkeit des Klotzes und Pfahles im Augenblicke der größten Zusammendrückung,
Q der Widerstand, welchen das Erdreich theils in Folge der Reibung an den Seitenflächen des Pfahles, theils an dem Fuße des Pfahles dem Eindringen des Letzteren entgegensetzt, oder die Tragfähigkeit, welche der Pfahl nach dem Stoße besitzt,
D die Tiefe, um welche der Pfahl vermöge des Stoßes eindringt.

Hierbei wird ebenso, wie früher, vorausgesetzt, daß der Pfahl durch den Stoß des Rammklotzes nur um eine sehr geringe Tiefe eingetrieben wird, sodaß der Widerstand Q während der ganzen Dauer der Bewegung als konstant angesehen werden kann.

Betrachtet man nun zuvörderst den Rammklotz am Ende der Zeit t, welche vom ersten Beginn des Stoßes an gerechnet ist, und bezeichnet den in diesem Augenblicke zwischen dem Klotze und dem Pfahle stattfindenden Druck mit P, ferner die Geschwindigkeit des Klotzes in demselben Augenblicke mit V; so ist die wirksame Kraft des Klotzes zu der erwähnten Zeit (§. 95) gleich $\frac{W_1}{g}\frac{dV}{dt}$. Da die Geschwindigkeit des Klotzes verzögert wird; so wirkt diese Kraft in vertikaler Richtung von unten nach oben, und ihr absoluter Werth ist $-\frac{W_1}{g}\frac{dV}{dt}$, indem der Differenzialkoeffizient $\frac{dV}{dt}$ hier einen negativen Werth hat. Nimmt man die vorstehende Kraft $-\frac{W_1}{g}\frac{dV}{dt}$ in entgegengesetzter, also in vertikaler Richtung von oben nach unten; so muß dieselbe nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit den übrigen auf den Klotz angebrachten Kräften, d. i. mit dem Drucke **P** des Pfahles gegen den Rammklotz im Gleichgewichte sein, und man hat daher

$$P = -\frac{W_1}{g}\frac{dV}{dt}.$$

Betrachtet man ferner die Bewegung des Pfahles am Ende derselben Zeit t, uud bezeichnet seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke mit v; so muß aus ähnlichen Gründen die wirksame und beschleunigende Kraft $\frac{W_2}{g}\frac{dv}{dt}$ desselben, wenn man dieselbe in entgegengesetzter, also in vertikaler Richtung von unten nach oben nimmt, mit den übrigen auf den Pfahl angebrachten Kräften, d. i. mit dem Drucke **P** des Rammklotzes gegen den Pfahl und mit dem Widerstande **Q** des Erdreiches im Gleichgewichte sein. Hieraus folgt die Gleichung

$$P = \frac{W_2}{g}\frac{dv}{dt} + Q.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung die Größe **P** so kommt

$$-\frac{W_1}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{W_2}{g}\frac{dv}{dt} + Q$$

oder

$$-\frac{W_1}{g}dV = \frac{W_2}{g}dv + Q\,dt.$$

Integrirt man diese Gleichung für die ganze Dauer **T** des Stoßes bis zu dem Augenblicke der größten Zusammendrückung, also zwischen den Gränzen $t=o$ und $t=T$, indem man beachtet, daß für $t=o$ die Geschwindigkeit **V** des Rammklotzes gleich der Geschwindigkeit V_1 desselben vor dem Stoße und für $t=T$ gleich der Geschwindigkeit v_1 desselben im Augenblicke der größten Zusammendrückung ist, daß ferner für $t=o$ die Geschwindigkeit v des Pfahles gleich null und für $t=T$ gleich der Geschwindigkeit v_1 des Klotzes im Augenblicke der größten Zusammendrückung ist; so erhält man

$$\frac{W_1}{g}(V_1-v_1)=\frac{W_2}{g}v_1+QT.$$

Vernachlässigt man in dieser Gleichung das Glied **QT**, welches wegen der sehr kurzen Dauer des Stoßes gegen die anderen beiden Glieder immer sehr klein sein wird; so ergibt sich daraus nach gehöriger Reduktion

$$(W_1+W_2)v_1=W_1 V_1$$

oder für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit des Klotzes und des Pfahles im Augenblicke der größten Zusammendrückung

$$v_1=\frac{W_1 V_1}{W_1+W_2} \quad \ldots . (741).$$

Von diesem Augenblicke der größten Zusammendrückung an kann der Rammklotz und der Pfahl als ein einziger starrer Körper von dem Gewichte W_1+W_2 angesehen werden. Rechnet man daher jetzt die Zeit t von dem eben erwähnten Augenblicke an; so ist der absolute Werth der wirksamen Kraft dieses Körpers am Ende der Zeit t, welche offenbar eine verzögernde ist, gleich $-\frac{W_1+W_2}{g}\frac{dv}{dt}$, wenn man die Geschwindigkeit desselben in jenem Augenblicke mit v bezeichnet. Nimmt man diese verzögernde Kraft in entgegengesetzter, also in vertikaler Richtung von oben nach unten; so muß dieselbe nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit dem Widerstande Q des Erdreiches im Gleichgewichte sein, und man hat

$$-\frac{W_1+W_2}{g}\frac{dv}{dt}=Q \text{ oder}$$

$$-\frac{W_1+W_1}{g}dv=Q\,dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\frac{W_1+W_2}{g}(v_1-v)=Q\,t \; , \; . \; . \; . \; (742)$$

wenn man beachtet, daß für $t=o$, $v=v_1$ sein muß. Bezeichnet man ferner mit T die Zeit, welche erforderlich ist, bis die Masse des Rammklotzes und Pfahles in Folge des Widerstandes des Erdreiches zur Ruhe kommt, sodaß für $t=T$, $v=o$ wird; so ergibt diese Gleichung

$$\frac{W_1+W_2}{g}v_1=Q\,T,$$

oder da nach Gleichung (741) $v_1=\frac{W_1 V_1}{W_1+W_2}$ ist,

$$\frac{W_1}{g}V_1=Q\,T \; . \; . \; . \; . \; (743).$$

Vernachlässigt man nun die Tiefe, um welche der Pfahl schon während der ungemein kurzen Dauer des eigentlichen Stoßes eingedrungen ist, und bezeichnet mit x die Tiefe, um welche sich derselbe am Ende der Zeit t seit dem Augenblicke der größten Zusammendrückung gesenkt hat; so hat man nach §. 96 $v=\frac{dx}{dt}$, und demnach wegen Gleichung (742)

$$\frac{W_1+W_2}{g}\left(v_1-\frac{dx}{dt}\right)=Q\,t \text{ oder}$$

$$-\frac{W_1+W_2}{g}dx=Q\,t\,dt-\frac{W_1+W_2}{g}v_1\,dt.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn man beachtet, daß für $t=o$ auch $x=o$ sein muß,

$$-\frac{W_1+W_2}{g}x=\tfrac{1}{2}Q\,t^2-\frac{W_1+W_2}{g}v_1\,t,$$

und mithin für $t=T$ und $x=D$, wenn man gleichzeitig für v_1 seinen Werth aus Gleichung (741) substituirt,

$$-\frac{W_1+W_2}{g}D=\tfrac{1}{2}QT^2-\frac{W_1}{g}V_1t \quad \ldots\ldots (744).$$

Eliminirt man zwischen dieser und der Gleichung (743) die Größe T; so erhält man

$$Q=\frac{(W_1V_1)^2}{2g(W_1+W_2)D} \text{ und } D=\frac{(W_1V_1)^2}{2g(W_1+W_2)Q} \quad \ldots (745).$$

Wenn man in diesen Formeln für $\frac{V_1^2}{2g}$ die Fallhöhe **H** des Rammklotzes substituirt; so reduziren sich dieselben auf

$$Q=\frac{W_1^2}{W_1+W_2}\,\frac{H}{D} \text{ und } D=\frac{W_1^2}{(W_1+W_2)Q}H \quad \ldots\ldots (746).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man den Widerstand Q des Erdreiches oder die Tragfähigkeit, welche der Pfahl besitzt, wenn er durch den Stoß des Rammklotzes um die Tiefe **D** eingedrungen ist; die zweite ergibt die Tiefe **D**, um welche der Pfahl bei dem letzten Schlage des Rammklotzes ziehen muß, damit er eine Tragfähigkeit gleich Q besitze.

Man muß sich hüten, aus den vorstehenden Untersuchungen den Schluß zu ziehen, daß der Effekt des von dem Rammklotze auf den Pfahl ausgeübten Stoßes mit der Wirkung eines auf den Kopf des Pfahles gesetzten Gewichtes, welches seiner Tragfähigkeit Q entspricht, identisch sei. Ein Stoß und ein ruhiger Druck sind zwei ganz heterogene Größen, welche sich nicht miteinander vergleichen lassen; nichtsdestoweniger läßt sich aus der Wirkung des Stoßes unter gegebenen Umständen der Widerstand Q bestimmen, welcher während des Stoßes nothwendig obgewaltet haben muß, und dieser Widerstand wird gemessen durch einen einfachen Druck. Die in dem stoßenden Körper angehäufte lebendige Kraft ertheilt dem gestoßenen Körper immer, wie klein sie auch sein mag, eine gewisse Bewegung, welche erst allmählig durch den Widerstand dieses zweiten Körpers vernichtet werden kann, und mit der Zeit wirklich vernichtet wird — ein ruhiger Druck dagegen erzeugt erst dann Bewegung, wenn er den Widerstand überschreitet, welcher ihm von dem zweiten Körper entgegengesetzt wird: ist ein solcher Überschuß des Druckes über den Widerstand aber fortwährend vorhanden; so wird die dem zweiten Körper mitgetheilte Bewegung nie aufhören, vielmehr wird dieselbe ins Unendliche beschleunigt werden, es sei denn, daß sich der Widerstand des zweiten Körpers mit der Zeit vermehrte und endlich den Druck des ersten Körpers überschritte, in welchem Falle natürlich nach einer gewissen Zeit ebenfalls der Zustand der Ruhe eintreten würde. In dem vorliegenden Falle würde ein jeder noch so geringer Stoß des Rammklotzes den Pfahl in Bewegung setzen und denselben (wenn Beide als unelastisch angesehen werden) um eine gewisse Tiefe eintreiben. Aus dieser Tiefe D ergibt sich durch die obigen Formeln (745) oder (746) der Widerstand Q, welcher sich der Bewegung des Pfahles entgegensetzen mußte, um denselben unter den obwaltenten Umständen wieder zur Ruhe zu bringen. Setzte man nun auf den Kopf des Pfahles ein Gewicht, welches kleiner oder gleich Q wäre; so würde der Pfahl unbeweglich bleiben: vermehrte man aber dieses Gewicht; so würde der Pfahl tiefer einsinken, und wenn sich bei diesem Tiefersinken der Widerstand des Erdreiches nicht vermehrte; so würde er in alle Unendlichkeit fortfahren, mit immer mehr zunehmender Geschwindigkeit das Erdreich zu durchdringen.

Bei der Anwendung der obigen Theorien auf die Praxis zeigen sich manche Schwierigkeiten, welche die Resultate derselben unter gewissen Umständen bedeutend modifiziren können. Wenn man über die kleinen Differenzen hinwegsieht, welche nothwendig durch die auf Abkürzung der Rechnung abzielenden Voraussetzungen entstehen müssen; so kann man sich vermittelst der früheren Rechnungen doch nur die Gewißheit verschaffen, daß der unter gewissen Bedingungen eingerammte Pfahl im ersten Augenblicke nach beendigten Schlage des Rammklotzes die erwartete Tragfähigkeit wirklich besitzt. Es zeigt sich nämlich, daß manche Erdarten, welche bei dem Einrammen der Pfähle immer bedeutend zusammengedrückt werden, die hierdurch erlangte Widerstandsfähigkeit allmählig und zuweilen in sehr hohem Grade verlieren, sodaß die belasteten Pfähle auf die Dauer nicht die gewünschte Tragfähigkeit behalten, und von dem darauf ruhenden Gewichte nach und nach tiefer eingedrückt werden. Ist man nun nicht im Stande, die Tragfähigkeit der Pfähle längere Zeit nach dem Einrammen zu prüfen und dieselben nöthigenfalls nachzurammen; so wird man immer genöthigt sein; die in dieser Beziehung gemachten Erfahrungen sorgfältig zu Rathe zu ziehen und sich nicht unbedingt auf die Resultate der abstrakten Rechnung zu verlassen.

Nach einigen Versuchen des Herrn Geh. Oberbaurath Hagen*) scheint der reine Sand Eine von denjenigen Erdarten zu sein, auf welche sich die Theorie mit der meisten Sicherheit anwenden läßt, während der von Wasser durchdrungene Thon Eine von denen ist, bei deren Vorkommen man von der Rechnung ganz abstrahiren muß, da derselbe die beim Einrammen des Pfahles angenommene Zusammendrückung mit der Zeit fast vollständig wieder verliert und sich alsdann ähnlich, wie eine sehr zähe Flüssigkeit verhält, in welcher der Pfahl mit seiner Belastung schwimmt. Die Eigenschaft des reinen Sandes möchte denn auch wol ein jeder kiesige, von Thonbeimengungen möglichst befreiete Boden besitzen. Je mehr Thon derselbe aber enthält, desto unsicherer werden die Resultate der Rechnung sein.

Endlich muß noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß nach den Formeln (746) die Tiefe, um welche der Pfahl durch den Stoß des Rammklotzes einsinkt, der Fallhöhe H des Letzteren proportional gefunden ist, sodaß man hiernach den Pfahl um eine gleiche Tiefe eintreiben würde, jenachdem man den Klotz zwei Mal von irgend einer bestimmten Höhe, oder Ein Mal von der doppelten Höhe herabfallen ließe. Dieses Resultat ist jedoch eine Folge der in dem vorstehenden Paragraphe gemachten, eine Abkürzung der Rechnung bezweckenden Voraussetzung, daß der Pfahl nicht eher anfange einzudringen, als bis die Zusammendrückung des Rammklotzes und des Pfahles ihr Maximum erreicht habe, und daß bis zu diesem Augenblicke der ganze Widerstand des Erdreiches vernachlässigt werden könne. Geht man jedoch von den Betrachtungen des §. 451 aus, und beachtet, daß das negative Glied auf der rechten Seite der Gleichung (726) konstant und von der Geschwindigkeit oder der Fallhöhe des Rammklotzes unabhängig ist; so erkennt man leicht, daß der durch den Stoß erzeugte und auf die Zusammendrückung des Klotzes und des

---

*) S. dessen Handbuch der Wasserbaukunst 1. Theil. S. 614.

Pfahles verwendete Verlust an lebendiger Kraft sich mit der Anzahl der Schläge wiederholt und demnach umso größer sein wird, je mehr Schläge vollführt werden müssen, um den Pfahl bis zu einer gewissen Tiefe einzutreiben, oder je kleiner die Fallhöhe des Rammklotzes ist. Die Versuche des Herrn Geh. Oberbaurath Hagen*) bestätigen Dies vollkommen und lehren, daß es behuf Ersparung von Betriebskraft vortheilhaft ist, die Fallhöhe des Rammklotzes so viel als möglich zu vermehren.

Um einen Anhaltspunkt für die Praxis bei dem Vorkommen solcher Bodenarten zu haben, auf welche sich die obigen theoretischen Untersuchungen mit einiger Zuverlässigkeit anwenden lassen; so wird noch bemerkt, daß Sganzin die Tragfähigkeit eines Pfahles bei dauernder Belastung zu 53450 Pfund annimmt, wenn derselbe mit dem 1280 Pfund schweren Rammklotze einer Kunstramme bei einer Fallhöhe von 11,47 Fuß und in der Hitze von 10 Schlägen nur noch um 4,59 Linien, oder wenn derselbe mit einem gleich schweren Rammklotze einer Zugramme, bei einer Fallhöhe von 3,82 ($=\frac{1}{3}.11,47$) Fuß und in einer Hitze von 30 Schlägen um dieselbe Tiefe eingetrieben wird.

Hierbei ist das Gewicht des Pfahles nicht angegeben. Nimmt man dasselbe gleich dem des Rammklotzes, also gleich 1280 Pfund an; so würde die Gleichung (746) für die Tragfähigkeit eines unter den beiden oben erwähnten Umständen eingerammten Pfahles 191670 Pfund ergeben. Hieraus folgt, daß Sganzin die Pfähle etwa nur mit dem vierten Theile des Gewichtes belastet, welches nach Gleichung (746) die theoretische Tragfähigkeit derselben ausmacht.

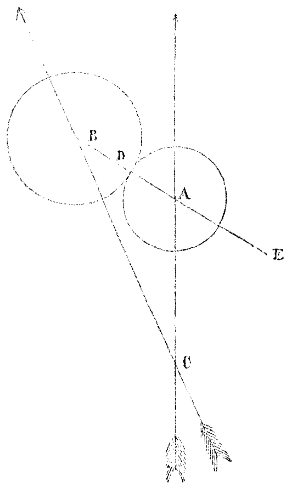
*) Handbuch der Wasserbaukunst. 1. Theil. S. 573 ff.

Zusätze zum sechsten Abschnitte.

Der schiefe Stoß.

1. Zwei Kugeln, welche sich mit beliebigen Geschwindigkeiten und in beliebigen Richtungen bewegen, stoßen zusammen; es sollen die Bedingungen für die Bewegung derselben nach dem Stoße angegeben werden.

Wenn **AB** die Lage der Mittellinie der beiden Kugeln zur Zeit des Stoßes und **D** der gemeinschaftliche Berührungspunkt derselben ist; so bezeichne



W_1 das Gewicht der Kugel **A**,

V_1 die Geschwindigkeit derselben vor dem Stoße in der Richtung **CA**,

β_1 den Neigungswinkel **CAE** gegen die Mittellinie **EB**,

v_1 die Geschwindigkeit der Kugel **A** nach dem Stoße,

γ_1 den Neigungswinkel dieser Geschwindigkeit gegen die Mittellinie **EB**,

W_2 das Gewicht der Kugel **B**,

V_2 die Geschwindigkeit derselben vor dem Stoße in der Richtung **CB**,

β_2 den Neigungswinkel **CBE** dieser Geschwindigkeit gegen die Mittellinie **EB**,

v_2 die Geschwindigkeit der Kugel **B** nach dem Stoße,

γ_2 den Neigungswinkel dieser Geschwindigkeit gegen die Mittellinie **EB**,

e habe die Bedeutung aus §. 441.

Vernachlässigt man die Reibung, welche sich zwischen den Berührungsflächen der zusammenstoßenden Kugeln äußert, und zerlegt die Geschwindigkeiten V_1 und V_2 resp. in ihren Komponenten $V_1 \sin\beta_1$, $V_1 \cos\beta_1$ und $V_2 \sin\beta_2$, $V_2 \cos\beta_2$, von denen die ersteren auf der Mittellinie AB perpendikular stehen oder zu der gemeinschaftlichen Tangente in D parallel sind, und die letzteren in der Richtung der Mittellinie AB liegen; so leuchtet ein, daß sich zur Veränderung der Komponenten $V_1 \sin\beta_1$ und $V_2 \sin\beta_2$ in Folge des Stoßes keine Ursache darbietet, indem die Kugeln mit diesen Seitengeschwindigkeiten ungehindert nebeneinander fortgleiten können, daß aber die Komponenten $V_1 \cos\beta_1$ und $V_2 \cos\beta_2$, mit welchen die Kugeln in der Richtung ihrer Mittellinie gegeneinander eindringen, nach den in §. 441 entwickelten Gesetzen modifizirt werden. Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Stoß in einem so kleinen Zeitraume erfolgt, daß es erlaubt ist, anzunehmen, der Berührungspunkt D der beiden Kugeln bleibe während der Zusammendrückung in der Richtung AB fortwährend derselbe.

Nimmt man nun die Neigungswinkel β_1 und β_2 der Geschwindigkeiten V_1 und V_2 gegen die Mittellinie EB immer nach derselben Seite herum, sodaß dieselben von 0 bis 360° wachsen können, wählt den Schenkel EA des Winkels β_1 aber so, daß dieser Winkel stets im ersten Quadranten liegt; so wechselt die Komponente $V_2 \cos\beta_2$, worin V_2 einen absolut positiven Werth behalten soll, ihr Zeichen mit dem Werthe des Winkels β_2 in solcher Weise, daß dadurch die Zweideutigkeit der doppelten Zeichen in den Gleichungen (712) und (713) vollkommen dargestellt wird. Substituirt man daher in diesen Gleichungen für V_1 und V_2 resp. die Werthe $V_1 \cos\beta_1$ und $V_2 \cos\beta_2$; so erhält man für die Komponenten der Geschwindigkeit v_1 und v_2 der Kugeln nach dem Stoße in paralleler Richtung zu der Mittellinie AB resp.

$$\frac{(W_1 - eW_2)V_1 \cos\beta_1 + (1+e)W_2 V_2 \cos\beta_2}{W_1 + W_2}$$

und

$$\frac{-(eW_1 - W_2)V_2 \cos\beta_2 + (1+e)W_1 V_1 \cos\beta_1}{W_1 + W_2}.$$

Da die Komponenten der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in perpendikularer Richtung zu der Mittellinie AB resp. $V_1 \sin\beta_1$ und $V_2 \sin\beta_2$ bleiben; so ergibt sich

$$v_1 = \sqrt{V_1{}^2 \sin^2\beta_1 + \left[\frac{(W_1 - eW_2)V_1\cos\beta_1 + (1+e)W_2V_2\cos\beta_2}{W_1 + W_2}\right]^2},$$

$$v_2 = \sqrt{V_2{}^2 \sin^2\beta_2 + \left[\frac{-(eW_1 - W_2)V_2\cos\beta_2 + (1+e)W_1V_1\cos\beta_1}{W_1 + W_2}\right]^2}.$$

Endlich hat man zur Bestimmung der Neigungswinkel γ_1 und γ_2 der Geschwindigkeiten nach dem Stoße gegen die Mittellinie **AB** die Gleichungen

$$\operatorname{tang}\gamma_1 = \frac{(W_1 + W_2)V_1\sin\beta_1}{(W_1 - eW_2)V_1\cos\beta_1 + (1+e)W_2V_2\cos\beta_2},$$

$$\operatorname{tang}\gamma_2 = \frac{(W_1 + W_2)V_2\sin\beta_2}{-(eW_1 - W_2)V_2\cos\beta_2 + (1+e)W_1V_1\cos\beta_1}.$$

Setzt man in diesen Formeln $e = 0$; so beziehen sich dieselben auf zwei unelastische Kugeln: setzt man dagegen $e = 1$; so entsprechen sie dem Falle zweier vollkommen elastischen Kugeln.

Setzt man $V_2 = 0$ und nimmt W_2 im Vergleich zu W_1 unendlich groß an; so erhält man die Bedingungen für den Fall, wo die mit der Geschwindigkeit V_1 fortgestoßene Kugel gegen eine feste Fläche stößt. Für unelastische Körper würde man unter dieser Voraussetzung $v_1 = V_1 \sin\beta_1$ und $\operatorname{tang}\gamma_1 = \infty$ erhalten, woraus folgt, daß sich die Kugel W_1 nach dem Stoße mit der Komponente $V_1 \sin\beta_1$ ihrer anfänglichen Geschwindigkeit in tangentialer Richtung zu der festen Fläche fortbewegen wird, und daß dieselbe demnach durch den Stoß die Seitengeschwindigkeit $V_1 \cos\beta_1$ in perpendikularer Richtung zu dem Widerstande verloren hat. Für vollkommen elastische Körper würde man dagegen unter derselben Voraussetzung $v_1 = V_1$ und $\operatorname{tang}\gamma_1 = -\operatorname{tang}\beta_1$ erhalten, woraus folgt, daß sich die Kugel W_1 nach dem Stoße mit der ursprünglichen Geschwindigkeit V_1 in einer Richtung fortbewegen wird, welche mit der Tangente im Berührungspunkte **D** einen gleichen, aber auf der entgegengesetzten Seite der Normalen **ED** liegenden Winkel einschließt.

2. In einem Systeme von ganz freien Körpern, auf welche keine äußeren Kräfte angebracht sind, er-

folgt ein Stoß, vermöge dessen die Körper plötzlich ihre Geschwindigkeiten ändern; es sollen die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße angegeben werden.

Es sei

m das Volum irgend eines Massentheilchens der Körper,

μ das Gewicht der Volumeinheit der Körper im Punkte m,

u_1, v_1, w_1 die Komponenten der Geschwindigkeit des Theilchens m in parallelen Richtungen zu drei beliebig gewählten rechtwinklichen Koordinatenaxen OX, OY, OZ,

u', v', w' die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Theilchens im Augenblick der größten Zusammendrückung zweier aneinanderstoßender Körper des Systemes,

u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Theilchens m am Ende des Stoßes,

e das Maaß für die relative Elastizität der beiden zusammenstoßenden Körper, denen das Theilchen m angehört (s. §. 441).

Wenn f_1, f_2, f_3 resp. die Geschwindigkeiten darstellen, welche das Theilchen m nach Verlauf der Zeit t in Einer Sekunde und in den positiven Richtungen der drei Axen gewinnen würde, wenn die Bewegung desselben plötzlich gleichförmig würde; so sind $\frac{\mu m}{g} f_1$, $\frac{\mu m}{g} f_2$, $\frac{\mu m}{g} f_3$ die wirksamen Kräfte, welche die Bewegung des Theilchens parallel zu den positiven Richtungen der Axen zu beschleunigen streben. Für diejenigen Theilchen, deren Bewegungen durch den Stoß verzögert werden, sind die vorstehenden wirksamen Kräfte nach den negativen Seiten der Axen gerichtet, indem alsdann f_1, f_2 und f_3 negative Werthe erhalten. Nimmt man die vorstehenden wirksamen Kräfte in entgegengesetzten Richtungen; so müssen sich dieselben nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit den übrigen auf das System angebrachten Kräften im Gleichgewicht erhalten. Da nun außer den gegenseitigen Pressungen, welche in Folge des Stoßes zwischen den Theilchen auftreten, und von denen je zwei einander gleich und entgegengesetzt sind, weiter keine Kräfte auf das System angebracht sind; so folgt, daß sich die für alle Theilchen genommenen Kräfte $-\frac{\mu m}{g} f_1$, $-\frac{\mu m}{g} f_2$, $-\frac{\mu m}{g} f_3$ oder auch $\frac{\mu m}{g} f_1$, $\frac{\mu m}{g} f_2$,

$\frac{\mu m}{g} f_3$ untereinander im Gleichgewichte erhalten müssen. Um die Bedingungen dieses Gleichgewichtes mit Hülfe des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten auszudrücken (§. 126); so nehme man an, das gegebene System erleide irgend eine unendlich kleine Verrückung aller seiner Theile, welche mit der gebenen Verbindung dieser Theile untereinander nicht in Widerspruche steht, und ein jedes Massentheilchen, wie m, beschreibe dabei in parallelen Richtungen zu den drei Axen, welche hier auch die Richtungen der darauf wirkenden Kräfte sind, resp. die Räume δx, δy, δz. Nimmt man alsdann für alle Theilchen des Systemes die Summe der virtuellen Momente $\frac{\mu m}{g} f_1 \delta x$, $\frac{\mu m}{g} f_2 \delta y$, $\frac{\mu m}{g} f_3 \delta z$; so erhält man nach dem erwähnten Prinzipe die Bedingungsgleichung

$$\Sigma \frac{\mu m}{g} (f_1 \delta x + f_2 \delta y + f_3 \delta z) = o$$

oder, wenn man für f_1, f_2 und f_3 resp. ihre Werthe $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ setzt,

$$\Sigma \frac{\mu m}{g}\left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z\right) = o.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit dt, integrirt dieselbe zwischen den Gränzen $t = o$ und $t = \mathrm{T}$, worin T die Zeit des Stoßes bis zum Augenblicke der größten Zusammendrückung der gegeneinanderstoßenden Körper bezeichnet, und beachtet dabei, daß für $t = o$, $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ und für $t = \mathrm{T}$ $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$ ist, und daß die Größen δx, δy, δz als von der Zeit unabhängig betrachtet werden können, da sich die Bedingungen der Verbindung der Theilchen des Systemes während der ungemein kurzen Dauer des Stoßes nur unmerklich ändern werden; so erhält man

$$\Sigma \frac{\mu m}{g} [(u' - u_1) \delta x + (v' - v_1) \delta y + (w' - w_1) \delta z] = o.$$

Da man durch eine ganz ähnliche Betrachtung für die zweite

Periode des Stoßes vom Augenblicke der größten Zusammendrückung bis zum Ende des Stoßes, wo die Körper sich voneinander trennen oder wenigstens keine Pressungen mehr aufeinander ausüben, die Gleichung

$$\Sigma \frac{\mu m}{g} \left[(u-u')\,\delta x + (v-v')\,\delta y + (w-w')\,\delta z\right] = o$$

erhält; so ergibt eine Addition beider

$$\Sigma \frac{\mu m}{g} \left[(u-u_1)\,\delta x + (v-v_1)\,\delta y + (w-w_1)\,\delta z\right] = o.$$

Was die Werthe der Größen δx, δy, δz betrifft, so bemerkt man, daß dieselben willkürlich, jedoch immer so angenommen werden müssen, daß die dadurch angedeuteten Verrückungen der einzelnen Theilchen des Systemes den gegebenden Verbindungen dieser Theilchen untereinander ein Genüge leisten. Da sich das Wesen dieser Verbindungen während der stets sehr geringen Dauer des Stoßes nur sehr wenig ändern wird; so sieht man, daß man jenen Größen für jeden beliebigen Augenblick des Stoßes dieselben Werthe beilegen kann. Aus diesem Grunde ist es denn auch erlaubt, die obigen Integrationen auszuführen, indem man δx, δy, δz in Bezeichnung zur Zeit als Konstanten behandelt. Übrigens ist leicht zu begreifen, daß man nicht unbedingt für die Verrückungen δx, δy, δz des Theilchens m diejenigen Räume substituiren darf, welche dasselbe während der unendlich kleinen Zeit dt seiner Bewegung am Ende der Zeit t wirklich beschreibt, daß man also nicht unbedingt $\delta x = u dt$, $\delta y = v dt$, $\delta z = w dt$ (worin u, v, w die Geschwindigkeiten am Ende der Zeit t bezeichnen sollen) setzen darf. Eine solche Annahme ist überhaupt nur in den Fällen erlaubt, wo die Art der Verbindung der Theile eines Systemes von der Zeit unabhängig ist, in den Fällen aber, wo sich die Verbindung der Theile mit der Zeit ändert, wie beim Stoße in Folge der fortschreitenden Zusammendrückung der Körper, ist die Substitution von $\delta x = u dt$ etc. durchaus nicht statthaft, weil am Ende der Zeit, in welcher der Raum $u dt$ wirklich beschrieben wird, die Art der Verbindung der Theile des Systemes eine andere geworden ist, als sie im Anfange dieser Zeit war. Man setzt zwar für die ganze Dauer des Stoßes δx als konstant, was, streng genommen, nicht richtig ist; aber der hierdurch begangene Fehler ist unendlich klein im Vergleich zu dem wahren Werthe der ebenfalls unendlich kleinen Größe δx. Setzt man aber $\delta x = u dt$; so würde man, obgleich beide Größen ungemein klein sind, einen Fehler begehen, der im Vergleich zu dem wahren Werthe von δx endlich sein könnte, und ein ganz irrthümliches Resultat liefern würde, wenn man erst die Gleichung durch dt dividirt hätte, sodaß δx als eine der Geschwindigkeit u proportionale Größe in dem Resultate verflochten wäre.

Übrigens bemerkt man, daß es während der Dauer des Stoßes einen Augenblick gibt, für welchen man $\delta x = u dt$, $\delta y = v dt$, $\delta z = w dt$ setzen kann. Dies ist der Augenblick der größten Zusammendrückung der Körper, weil in diesem Momente die Theilchen zweier zusammenstoßender Körper solche gemeinschaftliche Geschwindigkeiten angenommen haben, daß sie die Formen der Körper nicht weiter zu ändern streben. Die sehr kleinen Räume, welche die Theilchen in diesem Augenblicke wirklich beschreiben, sind von der Beschaffenheit, daß man die Theilchen um dieselben Größen verrücken könnte, ohne mit den Bedingungen in Widerspruch zu treten, welche für die Verbindung der Theilchen in demselben Augenblicke gelten. Da man nun für den fraglichen Moment der größten Zusammendrückung $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$ hat; so folgt, daß man in der obigen Gleichung

$$\delta x = u' dt, \qquad \delta y = v' dt, \qquad \delta z = w' dt$$

setzen könne. Thut man Dies und dividirt mit dt; so kommt

$$\Sigma \frac{\mu m}{g} [(u - u_1) u' + (v - v_1) v' + (w - w_1) w'] = o.$$

Der Gewinn oder Verlust an Geschwindigkeit, welchen das Theilchen m vom Anfange des Stoßes bis zum Augenblicke der größten Zusammendrückung in der Richtung der Axe OX erleidet, ist resp. $u' - u_1$ oder $u_1 - u'$ und demnach der Gewinn oder Verlust an Geschwindigkeit, welchen das Theilchen vom Augenblicke der größten Zusammendrückung bis zum Ende des Stoßes erleidet, wegen der unvollkommenen Elastizität der beiden zusammenstoßenden Körper, welchen jenes Theilchen angehört, resp.

$e(u'-u_1)$ oder $e(u_1-u')$. Hieraus folgt, daß die Geschwindigkeit u dieses Theilchens am Ende des Stoßes und in der Richtung der Axe OX resp. gleich $u'+e(u'-u_1)$ oder $u'-e(u_1-u')$, d. i. in beiden Fällen $u=(1+e)u'-eu_1$ ist. Aus dieser letzteren Gleichung ergibt sich für die Geschwindigkeit im Augenblicke der größten Zusammendrückung $u'=\frac{u+eu_1}{1+e}$. In ähnlicher Weise findet man für die Geschwindigkeit des Theilchens m im Augenblicke der größten Zusammendrückung und in den Richtungen der Axen OY und OZ $v'=\frac{v+ev_1}{1+e}$ und $w'=\frac{w+ew_1}{1+e}$. Substituirt man diese Werthe für u', v' und w' in die obige Gleichung; so wird dieselbe

$$\Sigma\frac{\mu m}{g(1+e)}[(u-u_1)(u+eu_1)+(v-v_1)(v+ev_1)+(w-w_1)(w+ew_1)]=o,$$

oder auch

$$\Sigma\frac{\mu m}{g(1+e)}[u^2+v^2+w^2-(1-e)(uu_1+vv_1+ww_1)-e(u_1{}^2+v_1{}^2+w_1{}^2)]=o,$$

Da $\Sigma\frac{\mu m}{g}(u_1{}^2+v_1{}^2+w_1{}^2)$ die gesammte lebende Kraft ist, welche das System vor dem Stoße besitzt, und $\Sigma\frac{\mu m}{g}(u^2+v^2+w^2)$ die gesammte lebende Kraft darstellt, welche das System nach dem Stoße besitzt; so ist der Verlust L an lebender Kraft, welchen das System durch den Stoß erleidet,

$$L=\Sigma\frac{\mu m}{g}[u_1{}^2+v_1{}^2+w_1{}^2-(u^2+v^2+w^2)].$$

Multiplizirt man die obige Beziehung, welche zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Theilchen vor und nach dem Stoße bestehen muß, mit 2 und addirt dieselbe alsdann zu dem vorstehenden Ausdrucke; so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$L=\Sigma\frac{\mu m}{g}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)[(u_1-u)^2+(v_1-v)^2+(w_1-w)^2].$$

Für den Fall, daß die zusammenstoßenden Körper unelastisch wären, hätte man $e=o$, und der vorstehende Ausdruck reduzirte sich auf

$$L=\Sigma\frac{\mu m}{g}[(u_1-u)^2+(v_1-v)^2+(w_1-w)^2].$$

Diese Formel drückt aus, daß der Verlust an lebender Kraft, welche unelastische Körper durch den Stoß erleiden, gleich der lebenden Kraft ist, welche ihren Verlusten an Geschwindigkeit (u_1-u), (v_1-v), (w_1-w) während des Stoßes in parallelen Richtungen zu den drei Axen entspricht. In diesem Satze besteht der Karnotsche Lehrsatz.

Wenn die zusammenstoßenden Körper vollkommen elastisch wären; so hätte man $e=1$, und der Werth von L reduzirte sich auf

$$L=o.$$

Hieraus folgt, daß ein System von vollkommen elastischen Körpern durch einen Stoß keinen Verlust an lebender Kraft erleidet.

Wirkung des Stoßes in den Maschinen.

3. Allgemeine Beziehung zwischen den während des Stoßes auftretenden Kräften und den Variationen der Geschwindigkeit.

Wenn auf die Körper irgend eines Systemes, zwischen denen ein Stoß erfolgt, noch verschiedene Kräfte P angebracht sind; so müssen sich offenbar nach dem d'Alembertschen Prinzipe in einem jeden Augenblicke des Stoßes die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen wirksamen Kräfte $-\frac{\mu m}{g}f_1$, $-\frac{\mu m}{g}f_2$, $-\frac{\mu m}{g}f_3$ oder $-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}$, $-\frac{\mu m}{g}\frac{dv}{dt}$, $-\frac{\mu m}{g}\frac{dw}{dt}$ der einzelnen Massentheilchen (s. den vorhergehenden Paragraph) mit den Kräften P an dem Systeme im Gleichgewichte erhalten. Drückt man die Bedingung dieses Gleichgewichtes mit Hülfe des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten aus, und nimmt an, daß bei einer unendlich kleinen Verrückung des ganzen Systemes, welche der gegebenen Verbindung seiner Theile untereinander entspricht, und bei welcher irgend ein Massertheilchen m in den Richtungen zu drei rechtwinkligen Axen die Räume δx, δy, δz beschreibt, der Angriffspunkt irgend Einer der Kräfte P in paralleler Richtung zu ihrer Wirkung den Raum δp beschreibe; so erhält man

$$\Sigma \mathrm{P}\,\delta p - \Sigma \frac{\mu m}{g}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\,\delta z\right) = o.$$

Wegen der sehr kurzen Dauer des Stoßes kann man nun annehmen, daß sich die Bedingungen für die gegenseitige Verbindung aller einzelnen Theilchen des Systemes während des Stoßes nicht ändern, und demnach die vorstehende Gleichung in Beziehung zur Zeit integriren, indem man δp, δx, δy, δz als Konstanten betrachtet. Setzt man hierbei voraus, die zusammenstoßenden Körper seien sämmtlich unelastisch, und die Geschwindigkeiten des Theilchens m in den Richtungen der drei Axen seien vor dem Stoße gleich u_1, v_1, w_1 und nach dem Stoße gleich u, v, w; so erhält man durch Integration zwischen den Gränzen $t = o$ und $t = \mathrm{T}$, worin T die Dauer des Stoßes bezeichnet,

$$\Sigma \delta p \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{P}\,dt - \Sigma \frac{\mu m}{g}\left[(u-u_1)\delta x + (v-v_1)\delta y + (w-w_1)\delta z\right] = o.$$

Da man nach dem vorhergehenden Paragraphe für die unendlich kleinen Verrückungen δp, δx, δy, δz, welche den Angriffspunkten der entsprechenden Kräfte im Einverständnisse mit den gegebenen Verbindungen der Körper des Systemes ertheilt werden, die Räume setzen darf, welche dieselben mit ihrer im Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindenden Geschwindigkeiten und in den Richtungen der Kräfte während des Zeitelementes dt beschreiben würden; so ergibt die vorstehende Gleichung, wenn man die Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft P in paralleler Richtung zu ihrer Wirkung am Ende des Stoßes mit γ bezeichnet und demnach $\delta p = \gamma\,dt$, $\delta x = u\,dt$, $\delta y = v\,dt$, $\delta z = w\,dt$ setzt,

$$\Sigma \gamma \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{P}\,dt - \Sigma \frac{\mu m}{g}\left[(u-u_1)u + (v-v_1)v + (w-w_1)w\right] = o.$$

Es leuchtet ein, daß wenn die Geschwindigkeiten eines jeden Theilchens m vor und nach dem Stoße in Ein und derselben geraden Linie liegen, man dieselben nicht nach drei Axen zu zerlegen braucht, und einfach

$$\Sigma \gamma \int_0^T \mathrm{P}\,dt - \Sigma \frac{\mu m}{g}(v - v_1)v = o$$

setzen kann.

Wenn diese Formeln auf eine Maschine angewendet werden sollen, zwischen deren Theilen ein Stoß erfolgt; so hat man für die Kräfte **P** die Wirkung der Schwere auf die einzelnen in Bewegung begriffenen Massen, den Druck der die Maschine treibenden Kraft, sämmtliche konstante Reibungswiderstände und außerdem die Pressungen nebst den daraus resultirenden Reibungen, welche sich in Folge des Stoßes zwischen zwei gegeneinandertreffenden Maschinentheilen äußern, zu substituiren.

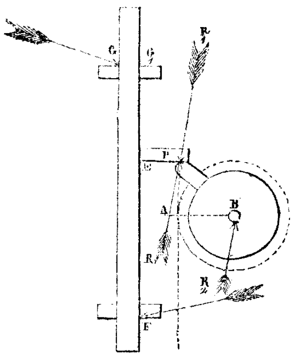
Die ersten drei der eben genannten Kräfte liefern wegen der sehr kurzen Dauer eines Stoßes für die obige Gleichung immer nur Glieder, welche gegen die übrigen aus den Wirkungen des Stoßes hervorgehenden Glieder vernachläßigt werden können.

Von den letzteren beiden Kräften würden die Pressungen, welche sich in Folge des Stoßes zwischen zwei Maschinentheilen erzeugen, wenn man das ganze System auf Ein Mal betrachtete, Glieder ergeben, von denen je zwei einander gleich und direkt entgegengesetzt sind, sodaß auch diese Kräfte aus der allgemeinen Gleichung verschwinden und nur diejenigen darin zurückbleiben würden, welche durch die aus den eben erwähnten Pressungen hervorgehenden Reibungswiderstände geliefert werden.

Betrachtete man jedoch nur eine gewisse Anzahl von Theilen der ganzen Maschine während des Stoßes, wie ein für sich bestehendes System, was offenbar erlaubt ist; so würden von den Gliedern, welche den Pressungen zwischen den einzelnen Theilen angehören, nur diejenigen verschwinden, welche durch die gemeinschaftliche Berührung zweier zu dem neuen Systeme gehörigen Theile gegeben sind; dagegen würden alle die Glieder zu berücksichtigen sein, welche Pressungen angehören, die sich zwischen den Theilen des neuen Systemes und den übrigen von diesen Systeme ausgeschlossenen Maschinentheilen ereigenen.

Anwendung auf den Stoß eines Daumens gegen die Hebelatte eines Stampfers.

4. Um die vorstehenden allgemeinen Prinzipien auf den Fall anzuwenden, wo die um die Axe **B** rotirende Welle mit dem



Daumen **P** gegen die Hebelatte **PE** eines Stampfers **FG** stößt und demselben eine gewisse Geschwindigkeit in vertikaler Richtung von unten nach oben mittheilt; so leuchtet zuvörderst ein, daß der in dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte des Daumens und der Hebelatte sich äußernde Druck **R** gegen die Normale auf der Oberfläche der Letzteren unter dem entsprechenden Reibungswinkel geneigt ist. (§. 140). In Folge dieses Druckes **R** wird der Stampfer in den Punkten **F** und **G** gegen die beiden Halter gepreßt, wenn die Richtung von **R** die Mittellinie des Stampfers unterhalb des Punktes **F** schneidet wie es gewöhnlich der Fall ist (Schnitte die Richtung von **R** die Mittellinie des Stampfers oberhalb des Punktes **F**; so würde derselbe offenbar bei **F** und G_1 gegen die Halter gepreßt werden). Aus §. 140 folgt nun ferner, daß die beiden Halter in den Punkten **F** und **G** mit Kräften Widerstand leisten, welche unter den entsprechenden Reibungswinkeln gegen die Normalen auf den Seitenflächen des Stampfers geneigt sind.

Ferner wird durch den Druck $R_1 = R$ im Punkte **P** eine Pressung an den Zapfen **B** der Welle hervorgerufen, und es leuchtet ein, daß der Widerstand R_2 des Zapfenlagers, welcher sich dieser Pressung entgegensetzt, unter dem zugehörigen Reibungswinkel gegen die Oberflächen der Zapfen der Welle geneigt sein muß.

Unter der Voraussetzung, daß die Oberfläche des Daumens nach einer Kreisevolvente gebildet sei, sodaß alle Berührungspunkte des Daumens mit der Hebelatte in der vertikalen Tangente **AP** des Theilkreises der Welle liegen, bezeichne

r_1 den Halbmesser **BA** des Theilkreises der Welle,

ϱ_1 den Halbmesser der Zapfen der Welle,
m irgend ein Volumelement der Welle,
r dessen Abstand von der Axe der Welle,
μ das Gewicht der Volumeinheit der Welle,
l die vertikale Länge des Stampfers zwischen den beiden Punkten F und G,
b die Länge EP der Hebelatte,
c die Breite des Stampfers oder den horizontalen Abstand der Punkte F und G,
k den vertikalen Abstand FE der Hebelatte vom Punkte F im Augenblicke des Stoßes,
h die vertikale Höhe AP der Hebelatte über dem Punkte A in demselben Augenblicke (diese Höhe ist gewöhnlich null),
W_2 das Gewicht des Stampfers,
R, F, G die Pressungen resp. in den Punkten P, F und G am Ende irgend einer Zeit t, vom Anfange des Stoßes aus gerechnet,
φ den Reibungswinkel für den Daumen und die Hebelatte bei P,
φ_1 den für die Zapfen und Lager bei B,
φ_2 den für den Stampfer und die Halter bei F und G,
v_1 die Winkelgeschwindigkeit der Welle vor dem Stoße,
v dieselbe nach dem Stoße,
u die vertikale Geschwindigkeit des Stampfers nach dem Stoße,
V die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle.

Betrachten wir zuvörderst den Stampfer; so ist, wenn vorläufig u die Geschwindigkeit desselben am Ende der Zeit t, vom Anfange des Stoßes aus gerechnet, darstellt, $\frac{W_2}{g}\frac{du}{dt}$ die wirksame Kraft desselben in diesem Augenblicke. Nimmt man dieselbe in entgegengesetzter, also in vertikaler Richtung von oben nach unten; so muß dieselbe nach dem d'Alembertschen Prinzipe mit den übrigen an dem Stampfer angebrachten Kräften R, F und G im Gleichgewichte sein. (Auf den Stampfer wirkt zwar außerdem noch die Schwere; aber der Einfluß dieser Kraft ist wegen der sehr kurzen Dauer des Stoßes im Vergleich zu den übrigen durch den Stoß plötzlich hervorgerufenen Kräften, welche in dieser sehr kurzen Zeit endliche Veränderungen der Geschwindigkeiten erzeugen, verschwindend klein, und kann deshalb vernachlässigt werden; s. d.

vorhergehenden Paragraph). Zerlegt man daher die Kräfte **R**, **F** und **G** in ihre Komponenten in vertikalen und horizontalen Richtungen; so fordert das obige Gleichgewicht, daß die Summe der ersteren mit Einschluß der in vertikaler Richtung von oben nach unten zu nehmenden Kraft $\frac{W_2}{g}\frac{du}{dt}$, ebenso wie die Summe der letzteren null sei (§. 10). Dies ergibt die beiden Gleichungen

$$R\cos\varphi = F\sin\varphi_2 + G\sin\varphi_2 + \frac{W_2}{g}\frac{du}{dt},$$

$$R\sin\varphi = F\cos\varphi_2 - G\cos\varphi_2.$$

Da ferner (§. 7) die Summe der Momente aller vorstehenden Kräfte oder deren Komponenten in Beziehung zu irgend einem Punkte null sein muß; so erhält man, wenn man diese Momente in Beziehung zum Punkte **P** nimmt, für welchen das Moment von **R** verschwindet,

$$kF\cos\varphi_2 + (l-k)G\cos\varphi_2 = bF\sin\varphi_2 + (b+c)\,G\sin\varphi_2 + \left(b+\frac{c}{2}\right)\frac{W_2}{g}\frac{du}{dt}.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Größen **F** und **G**; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$R\cos\varphi = \frac{l\,\frac{W_2}{g}\,\frac{du}{dt}}{l-(2b+c)\text{tang}\varphi_2-(l-2k)\text{tang}\varphi\,\text{tang}\varphi_2+c\,\text{tang}\varphi\,\text{tang}^2\varphi_2}.$$

Führt man die Division auf der rechten Seite dieser Gleichung wirklich aus, und vernachlässigt alle Glieder, welche in mehr als Eine Dimension der sehr kleinen Größen $\text{tang}\varphi$, $\text{tang}\varphi_2$ multiplizirt sind; so reduzirt sich dieselbe auf

$$R\cos\varphi = \left(1+\frac{2b+c}{l}\text{tang}\,\varphi_2\right)\frac{W_2}{g}\;\frac{du}{dt}.$$

Betrachten wir jetzt die Welle, an welcher sich während des Stoßes der Widerstand $R_1 = R$ der Hebelatte gegen den Daumen in der Richtung R_1P, ferner der Widerstand R_2 der Zapfenlager gegen die Zapfen und die wirksamen Kräfte der einzelnen Massentheilchen der Welle, Letztere in entgegengesetzten Richtungen genommen, im Gleichgewichte erhalten müssen, indem man bemerkt, daß die Wirkung des Gewichtes der Welle während der sehr kurzen Dauer des Stoßes gegen die übrigen durch den Stoß ins Leben gerufenen Kräften vernachlässigt werden kann. Da die wirksamen Kräfte aller Massentheilchen der als symmetrisch gedachten Welle keine Resultante haben, und sich nur auf ein mittleres Kräftepaar (s. den Anhang zum ersten Abschnitte) reduziren lassen, dessen Axe B ist; so folgt, daß diese Kräfte auch keinen Druck an der Umdrehungsaxe hervorbringen werden, und daß daher der ganze gegen die Zapfenlager bei **B** sich äußernde Druck R_2 dem Drucke **R** zwischen dem Daumen und der Hebelatte gleich und parrallel ist.

Bezeichnet man nun vorläufig die Winkelgeschwindigkeit der Welle am Ende der Zeit t, vom Anfange des Stoßes aus gerechnet, mit v; so ist die Geschwindigkeit irgend eines um r von der Umdrehungsaxe abstehenden Theilchens m gleich rv, die wirksame Kraft desselben gleich $\frac{\mu m}{g} r \frac{dv}{dt}$, und das Moment dieser wirksamen Kraft in Beziehung zu der Umdrehungsaxe gleich $\frac{\mu m}{g} r^2 \frac{dv}{dt}$. Da die Geschwindigkeit der Welle durch den Stoß verzögert wird; so wirkt diese Kraft in der Richtung **PA** um die Welle: außerdem ist der absolute Werth derselben $= -\frac{\mu m}{g} r \frac{dv}{dt}$, weil hier der Differenzialkoeffizient von v in Beziehung zur Zeit t negativ ist. Nimmt man daher die Kräfte $-\frac{\mu m}{g} r \frac{dv}{dt}$ für alle Elemente der Welle in entgegengesetzten Richtungen, also in den Richtungen **AP** um die Welle herum; so müssen dieselben mit den Kräften R_1 und R_2 im Gleichgewichte sein. Da nun das Moment der Kraft $R_1 = R$ in Beziehung zur Axe der Welle $r_1 R \cos\varphi + h R \sin\varphi$, ferner das Moment der Kraft $R_2 = R$ in Beziehung zu derselben Axe $R \varrho_1 \sin\varphi_1$ §. 154 und endlich die Summe der Momente der wirksamen Kräfte aller Massentheilchen der Welle $-\Sigma \frac{\mu m}{g} r^2 \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} \Sigma \mu m r^2$ ist; so erhält man

$$\mathrm{R}(r_1 \cos\varphi + h \sin\varphi) + \mathrm{R}\varrho_1 \sin\varphi_1 = -\frac{1}{g}\;\frac{dv}{dt}\,\Sigma\mu m r^2.$$

Wenn die Welle nebst den um ihre Axe sich drehenden Maschinentheilen (z. B. mit einem daran befestigten Wasserrade, Schwungrade rc.) aus einem gleichartigen Materiale besteht, sodaß das Gewicht μ der Volumeinheit dieses Materiales in allen Punkten konstant ist; so hat man $\Sigma\mu m r^2 = \mu\Sigma m r^2 = \mu \mathrm{J}$, worin J das Trägheitsmoment der Welle bezeichnet. Bestände die Welle jedoch aus ungleichartigen Massen; so hätte man unter $\mu\mathrm{J}$ die Summe der Produkte der Trägheitsmomente der einzelnen Massen in die entsprechenden Gewichte ihrer Volumeinheiten zu verstehen. Substituirt man unter dieser Voraussetzung $\mu\,\mathrm{J}$ für $\Sigma\mu m r^2$; so ergibt die vorstehende Gleichung nach gehöriger Reduktion

$$\mathrm{R}\cos\varphi = \frac{-\frac{\mu\,\mathrm{J}}{g}\;\frac{dv}{dt}}{r_1 + h\,\mathrm{tang}\,\varphi + \varrho_1\,\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi}},$$

oder wenn man die Division ausführt, und alle Glieder vernachlässigt, welche mehr, als Eine Dimension der sehr kleinen Größen $\mathrm{tang}\,\varphi$ und $\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi}$ enthalten,

$$\mathrm{R}\cos\varphi = -\frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{h}{r_1}\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{\varrho_1}{r_1}\;\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi}\right)\frac{\mu\,\mathrm{J}}{g}\;\frac{dv}{dt}.$$

Setzt man diesen Werth dem vorhin für $\mathrm{R}\cos\varphi$ gefundenen gleich, und schreibt der Kürze halber

$$\mathrm{C} \text{ für } r_1^{\,2}\,\mathrm{W}_2\left(1 + \frac{2b+c}{l}\,\mathrm{tang}\,\varphi_2\right)$$

und

$$\mathrm{D} \text{ für } \mu\mathrm{J}\left(1 - \frac{h}{r_1}\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{\varrho_1}{r_1}\;\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi}\right);$$

so kommt

$$\mathrm{C}\,\frac{du}{dt} = -\mathrm{D}\,r_1\,\frac{dv}{dt}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit dt, und integrirt dieselbe für die Zeit des ganzen Stoßes, also zwischen den Gränzen o und u von u, v_1 und v von v; so erhält man

$$Cu = Dr_1(v_1 - v),$$

und da die Geschwindigkeit u des Stapfers am Ende des Stoßes gleich der Geschwindigkeit $r_1 v$ des Theilkreises der Welle ist,

$$Cv = D(v_1 - v).$$

Hieraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit der Welle am Ende des Stoßes als Funktion der Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoße

$$v = \frac{D}{C+D} v_1.$$

Die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v differiren gewöhnlich nur sehr wenig voneinander. Setzt man daher die **mittlere** Winkelgeschwindigkeit der Welle $= V$; so kann man mit Poncelet näherungsweise

$$V = \frac{v_1 + v}{2}$$

annehmen. Aus dieser und der vorhergehenden Beziehung ergeben sich folgende Werthe für die Winkelgeschwindigkeit der Welle vor und nach dem Stoße als Funktionen der mittleren Geschwindigkeit V,

$$v_1 = \frac{2(C+D)}{C+2D} V, \quad v = \frac{2D}{C+2D} V.$$

Da die lebende Kraft der Welle vor dem Stoße $\Sigma \frac{\mu m}{g} (r\, v_1)^2 = \frac{\mu J}{g} v_1^2$ und nach dem Stoße $= \frac{\mu J}{g} v^2$ ist; so hat die Welle durch den Stoß die lebende Kraft

$$\frac{\mu J}{g}(v_1^2 - v^2) = \frac{4\mu J}{g} \quad \frac{C}{C+2D} V^2$$

verloren. Die angehäufte Arbeit der Welle ist demnach durch den Stoß um die Hälfte dieses Ausdruckes oder um

$$\frac{2\mu J}{g} \; \frac{C}{C+2D} V^2$$

vermindert worden (§. 67), eine Verminderung, welche durch die Arbeit der treibenden Kraft nebst den übrigen von dieser Kraft zu leistenden Arbeitsgrößen wiederersetzt werden muß.

Um den Model für die Bewegung des hier in Rede stehenden Systemes zu bestimmen; so sei

P_1 die Größe der treibenden Kraft,

a_1 der Abstand, in welchem dieselbe von der Axe der Welle wirkt,

W_1 das Gewicht der Welle nebst Zubehör,

H die Höhe, um welche der Stampfer nach einem jeden Stoße eines Drumens gehoben wird.

Man bemerkt, daß die Wirkung der treibenden Kraft zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen zuvörderst die obige Quantität der durch den Stoß verloren gehenden angehäuften Arbeit der Welle ersetzen, alsdann den Stampfer auf die Höhe H erheben und dabei alle schädlichen Widerstände überwinden, und zuletzt die Reibungswiderstände an den Zapfen der bis zu dem nächsten Hube frei gehenden Welle besiegen muß.

Betrachtet man den Stampfer wie eine verzahnte Stange; so ist die Arbeit, welche zur Hebung desselben auf die Höhe H erforderlich sein würde, wenn diese Hebung mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgte, durch Gleichung (271) (§. 229) ausgedrückt, wenn man $U_1 = P_1 a_1 \psi_1$, $U_2 = W_2 r_1 \psi_1$, $S = r_1 \psi_1 = H$ setzt, worin ψ_1 den Winkel bezeichnet, um welchen sich die Welle drehet, während ihr Theilkreis den Bogen H durchläuft. Behält man daher die übrigen Bezeichnungen des §s. 229 und der früheren Paragraphe bei und setzt den Koeffizienten von U_2 aus Gleichung (271) der Kürze halber $= M$; so hat man für die zur Hebung des Stampfers und zur Überwindung der dabei vorkommenden Reibungswiderstände erforderliche Arbeit (wenn man die Reibungen an den Haltern vernachlässigt, welche selbst erst durch die Reibung zwischen dem Daumen und der Hebelatte hervorgerufen werden und deshalb von keiner großen Bedeutung sind)

$$M W_2 r_1 \psi_1 + N r_1 \psi_1 .$$

Streng genommen, ist während dieser Periode der Bewegung ein etwas größerer Aufwand an Arbeit der treibenden Kraft erforderlich, weil während derselben auch die Geschwindigkeit des Stampfers beschleunigt wird. Der hierzu nöthige Betrag bleibt jedoch, um die Rechnung nicht zu sehr zu verwickeln, unberücksichtigt.

In der hierauf folgenden Periode hat die treibende Kraft nur die Reibung zu überwinden, welche durch den Druck des Gewichtes der Welle und durch den der treibenden Kraft selbst an den Zapfen der Welle hervorgerufen wird. Diese Reibung würde im ungünstigsten Falle dann am beträchtlichsten sein, wenn die treibende Kraft P_1 in vertikaler Richtung von oben nach unten wirkte. Für diesen Fall würde man nach §. 154 im Gränzzustande des Gleichgewichtes

$$P_1 = \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{a_1 - \varrho_1 \sin\varphi_1} W_1 \text{ oder näherungsweise} = \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{a_1} W_1$$

haben. Beschreibt nun die Welle während dieser Periode der Bewegung den Bogen ψ_2, und demnach der Angriffspunkt der treibenden Kraft P_1 den Bogen $a_1 \psi_2$; so hat man für die Arbeit, welche zur Überwindung der Reibung an den Zapfen der Welle erforderlich ist,

$$\varrho_1 \sin\varphi_1 W_1 \psi_2.$$

Addirt man jetzt zu der Summe der vorstehenden beiden Arbeitsgrößen den Verlust an angehäufter Arbeit, welchen die Welle bei einem jeden Stoße erleidet, und beachtet, daß die Arbeit der treibenden Kraft zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen $P_1 a_1 (\psi_1 + \psi_2)$ ist; so ergibt sich die Gleichung

$$P_1 a_1 (\psi_1 + \psi_2) = (MW_2 + N) r_1 \psi_1 + \varrho_1 \sin\varphi_1 W_1 \psi_2 + \frac{2\mu J}{g} \frac{C}{C+2D} V^2.$$

Das Vorstehende ist der Werth der Arbeit, welche die treibende Kraft für eine jede zwischen zwei Stößen liegende Periode leisten muß. Enthält die Welle n_1 Daumen; so ergeben die beiden Beziehungen $n_1(\psi_1 + \psi_2) = 2\pi$ und $r_1 \psi_1 = H$ für ψ_1 und ψ_2 die Werthe $\psi_1 = \frac{H}{r_1}$ und $\psi_2 = \frac{2\pi}{n_1} - \frac{H}{r_1}$. Hierdurch geht die obige Gleichung in

$$P_1 a_1 (\psi_1 + \psi_2) = (MW_2 + N)H + \left(\frac{2\pi}{n_1} - \frac{H}{r_1}\right)\varrho_1 \sin\varphi_1 W_1 + \frac{2\mu J}{g} \frac{C}{C+2D} V^2$$

über.

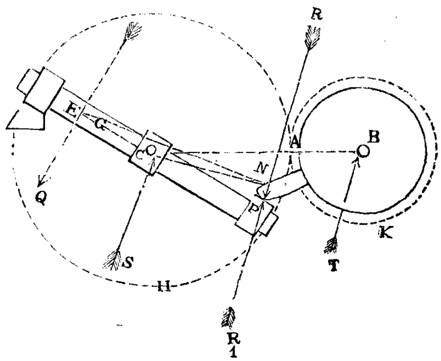
Wenn die Welle in der Minute m oder in der Sekunde $\frac{m}{60}$ Umdrehungen macht, sodaß der Endpunkt eines Radius gleich der Längeneinheit in der Sekunde den Raum $\frac{2\pi m}{60} = \frac{\pi m}{30}$ beschreibt; so hat man $V = \frac{\pi m}{30}$. Da die Welle n_1 Daumen enthält; so erfolgen in einer beliebigen Zeit, wo der Theilkreis derselben den Raum S durchläuft, $n_1 \frac{S}{2\pi r_1}$ Stöße. Multiplizirt man daher die vorstehende Gleichung mit $n_1 \frac{S}{2\pi r_1}$, substituirt $\frac{\pi m}{30}$ für V, und bezeichnet die Arbeit $n_1 \frac{S}{2\pi r_1} P_1 a_1 (\psi_1 + \psi_2) = P_1 a_1 \frac{S}{r_1}$ der treibenden Kraft während dieser Zeit mit U_1; so erhält man für den gesuchten Model der in Rede stehenden Maschine

$$U_1 = \frac{n_1 S}{2\pi r_1}\left[(MW_2 + N)H + \left(\frac{2\pi}{n_1} - \frac{H}{r_1}\right)\varrho_1 \sin\varphi_1 W_1 + \frac{\pi^2 m^2}{450} \frac{C}{C+2D} \frac{\mu J}{g}\right].$$

Anwendung auf den Stoß eines Daumens gegen einen Hammer.

5. Nach der früheren allgemeinen Untersuchungen muß in einem jeden Augenblicke des Stoßes, welchen der Daumen der Welle B gegen den Hammer CP ausübt, zwischen sämmtlichen durch diesen Stoß hervorgerufenen Kräften Gleichgewicht stattfinden, wenn man die erzeugten wirksamen Kräfte der einzelnen Massentheilchen in entgegengesetzten Richtungen nimmt. Gegen diese plötzlichen Kräfte können alle übrigen auf die Maschine wirkenden konstanten Kräfte, wie die Wirkung der Schwere und der treibenden Kraft, als verschwindend klein, vernachlässigt werden.

Durch den Stoß empfängt nun der Hammer, welcher hier als ein Schwanzhammer dargestellt ist, eine Geschwindigkeit in der Richtung **AH**, und die wirksamen Kräfte seiner einzelnen Theilchen sind demnach von der Art, daß sie sämmtlich eine Drehung in der Richtung **AH** um die Axe **C** hervorzubringen streben. Nimmt man diese Kräfte also in Richtungen, in welchen sie eine Drehung des Hammers von **H** nach **A** zu bewirken streben würden; so müssen sich dieselben mit dem Drucke **R** des Daumens gegen den Helm des Hammers im Punkte **P** in der Richtung **RP** und mit dem Widerstand **S** der Zapfenlager gegen die Zapfen bei **C** im Gleichgewichte erhalten.



Die Welle, welche sich in der Richtung **AK** drehet, erleidet durch den Stoß eine Verzögerung in dieser Richtung, oder empfängt eine Beschleunigung in der Richtung **KA**, in welcher demnach auch die wirksamen Kräfte aller ihrer Theilchen wirken. Nimmt man nun die Letzteren in solchen Richtungen, daß sie eine Drehung der Welle von **A** nach **K** hervorzubringen streben würden; so müssen sich dieselben mit dem Widerstande $R_1 = R$ des Hammerhelmes gegen den Daumen in der Richtung R_1P und mit dem Widerstande **T** der Zapfenlager gegen die Zapfen bei **B** im Gleichgewichte erhalten.

Nun sei **A** der Punkt in der Verbindungslinie **BC** der Mittelpunkt der Welle und des Hammers, in welchem sich die Theilkreise Beider berühren, sodaß eine von **A** nach irgend einem gemeinschaftlichen Berührungspunkte **P** des Daumens und Hammerhelmes gezogene Linie **AP** auf den Berührungsflächen perpendikular steht (§. 201); ferner sei **G** der Schwerpunkt des Hammers, **E** der Mittelpunkt des Stoßes desselben (§. 109), welcher in der Verlängerung der Linie **CG** liegt, und es bezeichne

r_1 und r_2 resp. die Halbmesser **BA** und **CA** der Theilkreise der Welle und des Hammers,

ϱ_1 und ϱ_2 resp. die Halbmesser der Zapfen bei **B** und **C**,

m irgend ein Volumelement der Welle oder des Hammers,

r dessen Abstand von der entsprechenden Umdrehungsaxe,

μ_1 oder μ_2 resp. das Gewicht der Volumeinheit der Welle oder des Hammers an der Stelle des Elementes m,

$\mathbf{W}_1$ und $\mathbf{W}_2$ resp. die Gewichte der Welle nebst Zubehör und des Hammers nebst Zubehör,

G den Abstand **CG** des Schwerpunktes des Letzteren von der Axe **C**,

R, **S**, **T** resp. die Widerstände, welche sich zwischen den Daumen und dem Hammerhelme bei **P** und zwischen den Zapfenlagern und den Zapfen bei **C** und bei **B** am Ende der Zeit t äußern, welche vom Anfange des Stoßes aus gerechnet ist,

λ den Abstand **AP** im Augenblicke des Stoßes,

ϑ den Winkel **CAP**,

$\mathbf{L}_2$ die Länge der Linie **EN**, welche den Mittelpunkt des Stoßes mit dem Fußpunkte des von **C** auf **RP** gefällten Perpendikels **CN** verbindet,

φ, φ_1, φ_2 resp. die Reibungswinkel für die Berührungsflächen bei **P**, **B**, **C**,

v_1 die Winkelgeschwindigkeit der Welle vor dem Stoße,

v dieselbe nach dem Stoße,

u die Winkelgeschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße,

V die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle.

Nimmt man vorläufig u für die Winkelgeschwindigkeit des Hammers am Ende irgend einer Zeit t des Stoßes, und beachtet, daß in Gleichung (82) $f = \frac{du}{dt}$ und $\mu \mathbf{M} = \mathbf{W}_2$ ist; so erhält man für die Resultante aller wirksamen Kräfte der einzelnen Massentheilchen des Hammers in diesem Augenblicke den Werth

$$\frac{W_2 G}{g} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Die Richtung dieser Kraft steht auf der durch die Axe C und durch den Schwerpunkt G des Hammers gezogenen Linie CE perpendikular (§. 108). Bezeichnet man mit $\mu_2 J_2$ die Summe der Produkte der Trägheitsmomente der einzelnen Theile des Hammers, welche von gleichem spezifischem Gewichte sind, in die Gewichte der entsprechenden Volumeinheiten; so erhält man anstatt Gleichung (84) für den Abstand CE der obigen Resultante von der Axe des Hammers den Ausdruck

$$\frac{\mu_2 J_2}{W_2 G},$$

worin $G = \overline{CG}$ ist.

Die Resultante $\frac{W_2 G}{g} \cdot \frac{du}{dt}$, in entgegengesetzter, also in der Richtung EQ genommen, muß nun mit dem Drucke R in der Richtung RP und dem Widerstande S im Gleichgewichte sein. Man sieht also, daß der Widerstand S der Zapfenlager bei S die Resultante der beiden Kräfte $\frac{W_2 G}{g} \frac{du}{dt}$ und R ist. Läge der Schwerpunkt G des Hammers in der Axe C, wie Dies z. B. bei der symmetrischen Welle B der Fall ist; so würde die Resultante der wirksamen Kräfte null werden, indem sich dieselben nur auf ein Kräftepaar (s. den Anhang zum ersten Abschnitte) reduziren ließen, dessen Axe mit der Umdrehungsaxe B zusammenfiele, und der Druck, welchen die Zapfen bei C in Folge des Stoßes auszuhalten hätten, wäre einfach gleich R. Fiele dagegen bei einem Aufwerfhammer, bei welchem der Stoß des Daumens zwischen dem Kopfe des Hammers und der Axe desselben erfolgt, und bei welchem demnach die Kraft R von unten nach oben gerichtet ist, die Richtung der Stoßkraft mit der durch den Mittelpunkt des Stoßes gehenden Linie QE zusammen; so würde $\frac{W_2 G}{g} \frac{du}{dt} = R$ und $S = o$ sein müssen, und die Zapfen des Hammers würden bei dieser Einrichtung in Folge des Stoßes gar keinen Druck erleiden.

Um jetzt die Bedingung für das Gleichgewicht der beiden

Kräfte $\frac{W_2 G}{g} \frac{du}{dt}$ und R unter Berücksichtigung der dadurch erzeugten Reibung an den Zapfen bei C und bei Vernachlässigung der Wirkung des Gewichtes des Hammers auszudrücken, kann man sich genau der Methode des §s 218 bedienen, indem man $\frac{W_2 G}{g} \frac{du}{dt}$ an die Stelle von P_2 und $CE = \frac{\mu_2 J_2}{W_2 G}$ an die Stelle von a_2 setzt. Demnach erhält man aus Gleichung (242), wenn man darin für m_2 seinen Werth aus Gleichung (245) substituirt,

$$\frac{W_1 G}{g} \frac{du}{dt} = \frac{W_2 G}{\mu_2 J_2}\left[r_2 \sin(\vartheta+\varphi) - \lambda \sin\varphi - \frac{W_2 G \varrho_2 L_2}{\mu_2 J_2} \sin\varphi_2\right] R.$$

Hieraus folgt

$$R = \frac{\frac{\mu_2 J_2}{g} \frac{du}{dt}}{r_2 \sin(\vartheta+\varphi) - \lambda \sin\varphi - \frac{W_2 G L_2 \varrho_2 \sin\varphi_2}{\mu_2 J_2}},$$

oder wenn man in dem Divisor den Faktor $r_2 \sin(\vartheta+\varphi)$ absondert, alsdann die Division ausführt, und alle Glieder vernachlässigt, welche in mehr, als Eine Dimension der sehr kleinen Größen $\sin\varphi$, $\sin\varphi_2$ multiplizirt sind,

$$R = \frac{\mu_2 J_2}{g r_2 \sin(\vartheta+\varphi)}\left[1 + \frac{\lambda \sin\varphi + \frac{W_2 G L_2 \varrho_2 \sin\varphi_2}{\mu_2 J_2}}{r_2 \sin(\vartheta+\varphi)}\right] \frac{du}{dt}.$$

Wenn der Berührungspunkt P zwischen dem Daumen und dem Helme des Hammers in dem Augenblicke des Stoßes in die Mittellinie BC fiele; so würde $\lambda = o$, $\vartheta+\varphi$ sehr nahe $= \frac{\pi}{2} - \varphi$ und $L_2 = r_2 + \overline{CE} = r_2 + \frac{\mu_2 J_2}{W_2 G}$ sein.

Um das Gleichgewicht der an der Welle B durch den Stoß hervorgerufenen Kräfte auszudrücken; so ist schon vorhin bemerkt, daß der Widerstand T der Zapfenlager gleich dem Widerstande

R_1 oder R des Hammerhelmes gegen den Daumen ist, da sich die wirksamen Kräfte der einzelnen Massentheilchen der symmetrischen Welle nur in ein Kräftepaar zusammensetzen lassen, welches auf die Umdrehungsaxe keinen Druck ausübt. Bezeichnet man nun mit $\mu_1 J_1$ die Summe der Produkte aus den Trägheitsmomenten der verschiedenen Theile der Welle, welche gleiche spezifische Gewichte besitzen, in die Gewichte der entsprechenden Volumeinheiten; so ist $-\frac{\mu_1 J_1}{g} \frac{dv}{dt}$ der absolute Werth der Summe der Momente aller wirksamen Kräfte der Welle in Beziehung zur Axe B (s. die vorhergehende Untersuchung über den Stoß eines Stampfers) und man hat, wenn m_1 das Perpendikel von B auf die Richtung $R_1 P$ darstellt,

$$Rm_1 + R\varrho_1 \sin\varphi_1 = -\frac{\mu_1 J_1}{g} \frac{dv}{dt},$$

d. i. nach Gleichung (244)

$$R[r_1 \sin(\vartheta+\varphi) + \lambda \sin\varphi + \varrho_1 \sin\varphi_1] = -\frac{\mu_1 J_1}{g} \frac{dv}{dt}.$$

Hieraus folgt

$$R = \frac{-\frac{\mu_1 J_1}{g} \frac{dv}{dt}}{r_1 \sin(\vartheta+\varphi) + \lambda \sin\varphi + \varrho_1 \sin\varphi_1},$$

oder wenn man im Divisor dieses Bruches den Faktor $r_1 \sin(\vartheta+\varphi)$ absondert, alsdann die Division ausführt, und alle Glieder vernachlässigt, welche mehr, als Eine Dimension der sehr kleinen Größen $\sin\varphi$ und $\sin\varphi_1$ enthalten,

$$R = -\frac{\mu_1 J_1}{g r_1 \sin(\vartheta+\varphi)} \left[1 - \frac{\lambda \sin\varphi + \varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1 \sin(\vartheta+\varphi)}\right] \frac{dv}{dt}.$$

Setzt man diesen Werth von R dem vorhin gefundenen gleich, und schreibt der Kürze halber

$$C \text{ für } \frac{\mu_2 J_2}{r_2{}^2} \left[1 + \frac{\lambda \sin\varphi + \frac{W_2 G L_2 \varrho_2 \sin\varphi_2}{\mu_2 J_2}}{r_2 \sin(\vartheta+\varphi)}\right]$$

und

$$\mathrm{D} \text{ für } \frac{\mu_1 \mathrm{J}_1}{r_1^{\,2}} \left[1 - \frac{\lambda \sin\varphi + \varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1 \sin(\vartheta + \varphi)}\right];$$

so erhält man

$$\mathrm{C}\, r_2 \frac{du}{dt} = -\mathrm{D}\, r_1 \frac{dv}{dt}.$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man zuvor mit dt multiplizirt hat, für die ganze Dauer des Stoßes, also zwischen den Gränzen o und u für u, v_1 und v für v; so kommt

$$\mathrm{C}\, r_2 u = \mathrm{D}\, r_1 (v_1 - v).$$

Da nun $r_2 u = r_1 v$ ist; so ergibt sich hieraus

$$\mathrm{C} v = \mathrm{D}(v_1 - v),$$

und demnach für die Winkelgeschwindigkeit der Welle nach dem Stoße

$$v = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}+\mathrm{D}}\, v_1.$$

Setzt man auch hier, wie bei dem früheren Falle eines Stampfers, näherungsweise die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle

$$\mathrm{V} = \frac{v_1 + v}{2};$$

so hat man

$$v_1 = \frac{2(\mathrm{C}+\mathrm{D})}{\mathrm{C}+2\mathrm{D}}\,\mathrm{V} \text{ und } v = \frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{C}+2\mathrm{D}}\,\mathrm{V}.$$

Die Welle verliert durch den Stoß an lebender Kraft

$$\frac{4\mu_1 \mathrm{J}_1}{g} \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}+2\mathrm{D}}\,\mathrm{V}^2,$$

und demnach an angehäufter Arbeit

$$\frac{2\mu_1 \mathrm{J}_1}{g} \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}+2\mathrm{D}}\,\mathrm{V}^2.$$

Der Model für das vorliegende System einer Daumenwelle und eines Hammers ergibt sich in ganz ähnlicher Weise, wie vorhin bei einer Welle mit einem Stampfer. Betrachtet man nämlich in der zweiten Periode der Bewegung, wo der Hammer gehoben wird, das Gewicht W_2 des Hammers als den von der treibenden Kraft P_1 zu überwindenden Nutzwiderstand, und nimmt an, daß die vertikale Richtung dieses Gewichtes bei der geringen Erhebung des Hammers stets durch den Punkt G gehe, in welchem sich der Schwerpunkt des Hammers im Augenblicke des Stoßes befindet; so findet man durch die bei den Verzahnungen §. 221 ff. angestellten Betrachtungen für die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Hammer so hoch zu heben, daß die Welle den Winkel ψ_1, also der Hammer den Winkel $\frac{r_1}{r_2}\psi_1$ und der Schwerpunkt des Hammers den Bogen $G\frac{r_1}{r_2}\psi_1$ beschreibt,

$$M W_2 G \frac{r_1}{r_2} \psi_1 + N r_1 \psi_1.$$

Hierin bezeichnet M einen konstanten Koeffizienten (Gleichung 256), und N hat den Werth aus Gleichung (252).

In der dritten Periode der Bewegung, wo die Welle leer geht, muß die treibende Kraft ebenso, wie bei dem Stampfer, die Arbeit

$$\varrho_1 \sin \varphi_1 W_1 \psi_2$$

verrichten, und man hat daher für den Werth der Gesammtarbeit, welche von der treibenden Kraft zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen entwickelt werden muß,

$$P_1 a_1(\psi_1+\psi_2)=MW_2G\frac{r_1}{r_2}\psi_1+Nr_1\psi_1+\varrho_1\sin\varphi_1W_1\psi_2+\frac{2\mu_1 J_1}{g}\,\frac{C}{C+2D}V^2.$$

Wenn die Welle n_1 Daumen hat, sodaß $n_1(\psi_1+\psi_2)=2\pi$ ist, und man bezeichnet den Winkel $\frac{r_1}{r_2}\psi_1$, um welchen der Hammer bei jedem Hube gedrehet wird, mit Ψ; so ist $\psi_1=\frac{r_2}{r_1}\Psi$ und $\psi_2=\frac{2\pi}{n_1}-\frac{r_2}{r_1}\Psi$.

Hierdurch geht die vorstehende Gleichung in

$$P_1 a_1(\psi_1+\psi_2)=MW_2G\Psi+Nr_2\Psi+\left(\frac{2\pi}{n_1}-\frac{r_2}{r_1}\Psi\right)\varrho_1\sin\varphi_1+\frac{2\mu_1 J_1}{g}\ \frac{C}{C+2D}\ V^2$$

über.

Macht endlich die Welle in der Minute m Umdrehungen, und bezeichnet man den Raum, welchen den Theilkreis derselben in einer beliebigen Zeit durchläuft, mit S; so erhält man in derselben Weise, wie früher bei einem Stampfer, für den Model der Welle mit dem Hammer

$$U_1=\frac{n_1 S}{2\pi r_1}\left[(MW_2G+Nr_2)\Psi+\left(\frac{2\pi}{n_1}-\frac{r_2}{r_1}\Psi\right)\varrho_1\sin\varphi_1+\frac{\pi^2 m^2}{450}\ \frac{C}{C+2D}\ \frac{\mu_1 J_1}{g}\right].$$

6. Schließlich wird noch bemerkt, daß wenn die Daumenwelle die Wirkung der treibenden Kraft nicht unmittelbar, sondern erst vermittelst anderer Räder oder sonstiger Kommunikatoren empfängt, man auf ähnliche Art, wie Dies in den obigen Beispielen geschehen ist, die ganze zusammengesetzte Maschine in ihre einfachen Elemente, welche für sich bestehende Ganze bilden, zerlegen und alsdann für ein jedes solches Maschinenelement das Gleichgewicht betrachten muß, welches an demselben zwischen den durch den Stoß hervorgerufenen Pressungen und Widerständen und den plötzlich erzeugten wirksamen Kräften aller Massentheilchen eines solchen Maschinenelementes, Letztere in entgegengesetzten Richtungen genommen, in irgend einem Augenblicke des Stoßes bestehen muß. Hierdurch erhält man ebenso viel Gleichungen, als Maschinenelemente, wie Räder, Daumenwellen, Stampfer, Hämmer 2c., vorhanden sind. Eliminirt man alsdann zwischen diesen Gleichungen die Pressungen, welche in Folge des Stoßes zwischen je zwei benachbarten Maschinenelementen auftreten, und deren Anzahl um Eine Einheit geringer ist, als die der Maschinenelemente; so bleibt eine Differenzial-Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Elemente in irgend einem Augenblicke des Stoßes zurück. Nachdem man diese Gleichung für die ganze Dauer des Stoßes integrirt hat, kann man vermittelst der Beziehungen, welche zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Maschinenelemente bestehen, die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente mit Ausnahme der eines beliebigen einzelnen eliminiren, und demzufolge die Geschwindigkeit dieses einzelnen nach dem Stoße als Funktion der Geschwindigkeit des-

selben vor dem Stoße ausdrücken. Hierbei kann man alsdann näherungsweise annehmen, daß die mittlere Geschwindigkeit der Daumenwelle das arithmetische Mittel zwischen den Geschwindigkeiten derselben vor und nach dem Stoße sei, und wird dadurch in den Stand gesetzt, die letzteren beiden Geschwindigkeiten für irgend ein Maschinenelement als Funktionen der mittleren Geschwindigkeit der Daumenwelle zu bestimmen. Nachdem diese Bestimmung für ein jedes Element geschehen ist, ergibt sich der Verlust an lebender Kraft oder an angehäufter Arbeit, welchen dasselbe durch den Stoß erleidet, von selbst. Addirt man diese Verluste an angehäufter Arbeit für alle Maschinenelemente von dem Rezeptor bis zu der Daumenwelle zu den übrigen Arbeitsgrößen, welche die treibende Kraft in den ferneren Perioden der Bewegung bis zu dem nächstfolgenden Stoße zu leisten hat; so erhält man den Model für die ganze Maschine.

Anhang.

Lehrsatz. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) \,.\, dx$ ist der Gränzwerth, welchen der Ausdruck $\Sigma_a^b f(x) . \triangle x$ oder die Summe der Produkte $f(x) . \triangle x$ anzunehmen strebt, wenn man die Größe x von a bis b sukzessive um gleiche Inkremente $\triangle x$ wachsen läßt, und ein jedes dieser gleichen Inkremente fortwährend und bis ins Unendliche vermindert, sodaß sich ihre Anzahl fortwährend und bis ins Unendliche vermehrt.

Um diesen Satz, welcher in dem vorliegenden Werke häufig zur Anwendung gekommen ist, zu beweisen, so bezeichne man das unbestimmte Integral $\int f(x).dx$ mit $\mathrm{F}(x)$, sodaß $\frac{d\mathrm{F}(x)}{dx} = f(x)$ ist. Nimmt man nun an, keiner der Differenzialkoeffizienten von $\mathrm{F}(x)$ werde für irgend einen Werth von x zwischen a und b unendlich; so hat man nach dem Täylorschen Lehrsatze, wenn x und $x + \triangle x$ zwei beliebige Werthe von x sind,

$$\mathrm{F}(x+\triangle x) = \mathrm{F}(x) + \triangle x . \frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{\triangle x^2}{1.2} \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} + \frac{\triangle x^3}{1.2.3} \frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3} + etc.,$$

oder wenn man $\frac{1}{1.2} \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} + \frac{\triangle x}{1.2.3} \frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3} + etc.$, mit M bezeichnet und $f(x)$ für $\frac{d\mathrm{F}}{dx}$ setzt,

$$\mathrm{F}(x+\triangle x) = \mathrm{F}(x) + f(x) . \triangle x + \mathrm{M} . \triangle x^2.$$

Theilt man den Unterschied zwischen a und b in n gleiche Theile und stellt einen jeden derselben durch $\triangle x$ dar, sodaß man

$$\frac{b-a}{n}=\triangle x$$

hat; so ergibt sich aus der vorstehenden Formel, wenn man darin nach und nach für x die Werthe a, $a+\triangle x$, $a+2\triangle x$, ... $a+(n-1)\triangle x$ substituirt,

$$F(a+\triangle x)=F(a)+f(a).\triangle x+M_1\triangle x^2$$
$$F(a+2\triangle x)=F(a+\triangle x)+f(a+\triangle x).\triangle x+M_2\triangle x^2$$
$$F(a+3\triangle x)=F(a+2\triangle x)+f(a+2\triangle x).\triangle x+M_3\triangle x^2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$
$$F(a+n\triangle x)=F[a+(n-1)\triangle x]+f[a+(n-1)\triangle x].\triangle x+M_n\triangle x^2.$$

Addirt man alle diese Gleichungen, hebt die auf beiden Seiten mitstehenden gleichen Glieder gegeneinander auf, und fügt außerdem auf der rechten Seite noch den Ausdruck $f(a+n\triangle x).\triangle x$ $-f(a+n\triangle x).\triangle x$ hinzu so erhält man

$$F(a+n\triangle x)=F(a)+\Sigma_0^n f(a+n\triangle x).\triangle x+\Sigma_1^n M_n\triangle x^2-f(a+n\triangle x).\triangle x$$

oder da $n\triangle x=b-a$ und $\Sigma_0^n f(a+n\triangle x).\triangle x$ offenbar $=\Sigma_a^b f(x).\triangle x$ ist,

$$F(b)-F(a)=\Sigma_a^b f(x).\triangle x+\Sigma_1^n M_n\triangle x^2-f(b).\triangle x$$

d. i.

$$\int_a^b f(x).dx=\Sigma_a^b f(x).\triangle x+\left[\Sigma_1^n M_n\triangle x-f(b)\right]\triangle x.$$

Weil nun der Annahme gemäß alle Werthe von $F(x)$ und $f(x)$ endlich sein sollen; so müssen auch alle Werthe der Größen M_1, M_2, M_3 ... endlich sein. Bezeichnet man daher den größten dieser Werthe mit M; so leuchtet ein, daß $\Sigma_1^n M_n < nM$ und daher auch $\Sigma_1^n M_n \triangle x < n \triangle x M$ d. i. $<(b-a)M$. Demzufolge hat man auch wegen der vorstehenden Gleichung

$$\int_a^b f(x).dx - \Sigma_a^b f(x) . \triangle x < [(b-a)M - f(b)] \triangle x.$$

Der Unterschied zwischen dem bestimmten Integrale $\int_a^b f(x).dx$ und der Summe $\Sigma_a^b f(x) . \triangle x$ ist also immer kleiner, als $[(b-a)M - f(b)]\triangle x$. Je größer man nun die Zahl n oder je kleiner man die Inkremente $\triangle x$ annimmt, desto geringer wird der Unterschied zwischen dem bestimmten Integrale und der Summe, und da derselbe durch fortwährende Verkleinerung von $\triangle x$ bis zu dem beliebig kleinsten Betrage herabgedrückt werden kann; so hat man

$$\int_a^b f(x) . dx = \lim. \Sigma_a^b f(x) . \triangle x,$$

d. h. das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) . dx$ ist der Gränzwerth der Summe der Produkte $f(x) . \triangle x$, wenn man x durch unendlich geringe Inkremente $\triangle x$ von a bis b wachsen läßt.

Der erste Ponceletsche Lehrsatz.

Bestimmung eines Näherungswerthes für die Wurzelgröße $\sqrt{a^2+b^2}$.

Wenn man den Werth der vorstehenden Wurzelgröße, in welcher das Verhältniß $\frac{a}{b}$ zwischen zwei gegebenen Gränzen nach Belieben variiren kann, näherungsweise

$$\sqrt{a^2+b^2} = \alpha a + \beta b$$

setzt; so sollen die beiden Koeffizienten α und β unter der Bedingung bestimmt wenden, daß der Fehler, welchen man hierdurch begeht, im Vergleich zu dem wahren Werthe der Wurzelgröße der möglich kleinste sei, oder mit andern Worten, daß der Ausdruck $\frac{\alpha a+\beta b-\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b}}=\frac{\alpha a+\beta b}{\sqrt{a^2+b^2}}-1$ für die ganze Reihe von Werthen, welche derselbe annimmt, wenn das Verhältniß $\frac{a}{b}$ zwischen zwei gegebenen Gränzen variirt, der möglich kleinste sei.

Man bezeichne diese beiden Gränzwerthe des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ mit $\cot\psi_1$ und $\cot\psi_2$ und irgend einen anderen Werth desselben mit $\cot\psi$. Substituirt man in dem vorstehenden Ausdrucke $\cot\psi$ für $\frac{a}{b}$ und beachtet, daß $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2\frac{a^2}{b^2}+b^2}$ $=\sqrt{b^2\cot^2\psi+b^2}=\frac{b}{\sin\psi}$ und $\alpha a+\beta b=\alpha b\frac{a}{b}+\beta b=$ $\alpha b\cot\psi+\beta b=\frac{b(\alpha\cos\psi+\beta\sin\psi)}{\sin\psi}$ ist; so erhält man für den Werth des gemachten Fehlers im Verhältnisse zu dem wahren Werthe der Wurzelgröße

$$\alpha\cos\psi+\beta\sin\psi-1 \quad \ldots . \ (1).$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein Maximum für denjenigen Werth ψ_3 von ψ, welcher durch die Gleichung

$$\cot\psi_3=\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots . \ (2)$$

bestimmt ist, sodaß dieser größte Fehler selbst durch

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-1 \quad \ldots . \ (3)$$

dargestellt ist. Ferner bemerkt man, daß die Funktion (1) weiter kein Maximum und ein Minimum überhaupt nicht zuläßt. Da die Werthe von α und β willkürlich sind; so nehme man an, dieselben seien von der Beschaffenheit, daß $\frac{\alpha}{\beta}$ oder $\cot\psi_3$ kleiner, als $\cot\psi_1$, und größer, als $\cot\psi_2$ sei: alsdann wird das Maximum (3) des Fehlers für einen gewissen Werth des Verhältnisses $\frac{a}{b}$, welcher zwischen den gegebenen Gränzen liegt, wirklich stattfinden können. Nun leuchtet ein, daß solange die Werthe (1) des Fehlers positiv bleiben, dieselben, nebst ihrem Maximum (3), sämmtlich vermindert werden, sowie man α und β vermindert. Wenn man jedoch diese Verminderung so weit getrieben hat, daß der Fehler für den Einen oder den anderen der Gränzwerthe ψ_1 und ψ_2 von ψ negativ wird; so begreift man ferner, daß diese negativen Fehler in dem Maaße wachsen werden, wie man α und β noch weiter vermindert, während das positive Maximum (3) des Fehlers fortwährend abnimmt. Hieraus geht hervor, daß die vortheilhafteste Bedingung in Beziehung zu der gesammten Reihe von Fehlern zwischen den gegebenen Gränzen der Veränderlichkeit von $\frac{a}{b}$ erhalten wird, wenn man die positiven Fehler soweit vermindert und dadurch die negativen soweit vermehrt, daß der größte positive Fehler (3) einem jeden der beiden negativen Fehler gleich wird, welche man aus der Formel (1) erhält, wenn man darin resp. ψ_1 oder ψ_2 an die Stelle von ψ setzt. Diese Bedingung, mit Hülfe der Formeln (1) und (3) analytisch ausgedrückt, ergibt zur Bestimmung der Werthe von α und β die doppelte Gleichung

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-1=-(\alpha\cos\psi_1+\beta\sin\psi_1-1)=-(\alpha\cos\psi_2+\beta\sin\psi_2-1).$$

Aus der letzteren folgt

$$\alpha\cos\psi_1+\beta\sin\psi_1=\alpha\cos\psi_2+\beta\sin\psi_2.$$

Setzt man hierin $\frac{\alpha}{\beta}=\cot\psi_3=\frac{\cos\psi_3}{\sin\psi_3}$; so findet man nach gehöriger Reduktion $\cos(\psi_1-\psi_3)=\cos(\psi_3-\psi_2)$, also $\psi_1-\psi_3=\psi_3-\psi_2$; demnach $\psi_3=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)$ und $\cot\psi_3=\frac{\alpha}{\beta}=\cot\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)$ oder

$$\alpha=\beta\cot\tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2).$$

Substituirt man diesen Werth für α auf der rechten Seite der vorstehenden Beziehung; so kommt

$$\alpha \cos \psi_1 + \beta \sin \psi_1 = \beta \frac{\cos \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)}{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}.$$

Werden diese Werthe in die erstere Gleichung gesetzt; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\beta = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{1 + \cos \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)} \quad \ldots . (4)$$

$$\alpha = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{1 + \cos \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)} \quad \ldots . (5).$$

Die Werthe von α und β ergeben für den größten Fehler nach Gleichung (3) den Ausdruck

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2) \ldots . (6).$$

Aus dem Vorstehenden folgt, daß der Werth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 + b^2}$ für alle Werthe von $\frac{a}{b}$, welche zwischen den Gränzen $\cot \psi_1$ und $\cot \psi_2$ liegen durch die Formel

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \frac{\cos \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)} + b \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)} \quad \ldots . (7)$$

mit einem Grade von Genauigkeit dargestellt ist, welcher dem Werthe $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)$ entspricht.

Wenn in der gegebenen Wurzelgröße der Werth von a im Verhältniß zu b unendlich wachsen oder der Werth von b im Verhältniß zu b unendlich abnehmen kann; so hat man $\cot \psi_1 = \infty$, mithin $\psi_1 = o$. In diesem Falle wird die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a(1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{4}\psi_2) + 2b \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi_2 \quad \ldots . (8)$$

und der größte Fehler

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{4}\psi_2 \ldots . (9).$$

Wenn beide Werthe von a und b ganz unbegränzt sind, sodaß a im Verhältniß zu b unendlich groß und unendlich klein werden kann; so hat man $\cot \psi_1 = \infty$, $\cot \psi_2 = o$; mithin $\psi_1 = o$,

$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$. Substituirt man diese Werthe; so wird die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}8284\,a + 0{,}8284\,b \quad \dots . \ (10)$$

und der größte Fehler

$$0{,}1716 \text{ oder nahe } \tfrac{1}{6}.$$

Wenn b stets kleiner ist, als a, aber um jeden beliebigen Werth kleiner sein kann, sodaß $\frac{a}{b}$ immer größer, als die Einheit ist, aber auch unendlich werden kann; so hat man $\cot\psi_1 = \infty$, $\cot\psi_2 = 1$; mithin $\psi_1 = o$, $\psi_2 = \frac{\pi}{4}$. Hierdurch wird die Näherungsformel

$$0{,}96046 . a + 0{,}39783 . b \quad \dots . \ (11)$$

und der größte Fehler

$$0{,}03945 \text{ oder nahe } \tfrac{1}{25}.$$

In der letzteren Weise ist diese Formel in den früheren Paragraphen des vorliegenden Werkes zur Anwendung gebracht.

Die folgende, von Gosselin berechnete Tabelle enthält die Werthe der Koeffizienten α und β für eine Reihe von Werthen der unteren Gränze $\cot\psi_2$, wobei die obere Gränze immer als unendlich vorausgesetzt wird.

Verhältniß von a zu b	Werth von $\cot\psi_2$	Werth von α	Werth von β	Größter Fehler	Näherungswerth von $\sqrt{a^2+b^2}$
a und b beliebig	0	0,82840	0,82840	0,17160 oder $\frac{1}{6}$	$0{,}8284(a+b)$
$a > b$	1	0,96046	0,39783	0,03954 oder $\frac{1}{25}$	$0{,}96046a + 0{,}39783b$
$a > 2b$	2	0,98592	0,23270	0,01408 oder $\frac{1}{71}$	$0{,}98592a + 0{,}23270b$
$a > 3b$	3	0,99350	0,16123	0,00650 oder $\frac{1}{154}$	$0{,}99350a + 0{,}16123b$
$a > 4b$	4	0,99625	0,12260	0,00375 oder $\frac{1}{266}$	$0{,}99625a + 0{,}12260b$
$a > 5b$	5	0,99757	0,09878	0,00243 oder $\frac{1}{417}$	$0{,}99757a + 0{,}09878b$
$a > 6b$	6	0,99826	0,08261	0,00174 oder $\frac{1}{589}$	$0{,}99826a + 0{,}08261b$
$a > 7b$	7	0,99875	0,07098	0,00125 oder $\frac{1}{800}$	$0{,}99875a + 0{,}07098b$
$a > 8b$	8	0,99905	0,06220	0,00095 oder $\frac{1}{1049}$	$0{,}99905a + 0{,}06220b$
$a > 9b$	9	0,99930	0,05535	0,00070 oder $\frac{1}{1428}$	$0{,}99930a + 0{,}05535b$
$a > 10b$	10	0,99935	0,04984	0,00065 oder $\frac{1}{1538}$	$0{,}99935a + 0{,}04984b$

Der zweite Ponceletsche Lehrsatz.

Bestimmung eines Näherungswerthes für die Wurzelgröße $\sqrt{a^2-b^2}$.

Setzt man näherungsweise

$$\sqrt{a^2-b^2}=\alpha a-\beta b;$$

so ist der relative Fehler, welchen man hierdurch begeht, durch

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}-(\alpha a-\beta b}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ oder durch } 1-\frac{\left(\alpha\frac{a}{b}-\beta\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$$

dargestellt. Da a^2 stets größer ist, als b^2; so ist $\frac{a}{b}>1$, und man kann demnach $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sin\psi}$ setzen. Hierdurch wird der relative Fehler $1-\frac{\left(\frac{\alpha}{\sin\psi}-\beta\right)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\psi}-1}}$ oder

$$1-\frac{\alpha}{\cos\psi}+\beta\tang\psi \;\ldots\ldots\; (12),$$

eine Funktion, welche ihr Maximum erreicht, wenn

$$\sin\psi=\frac{\beta}{\alpha} \;\ldots\ldots\; (13)$$

ist. Der Werth des größten Fehlers ist demnach $1-\frac{\alpha}{\cos\psi}$

$$+\beta\tang\psi=1-\frac{\alpha-\beta\sin\psi}{\cos\psi}=1-\frac{\alpha-\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}}=$$

$$1-\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \;\ldots\ldots\; (14).$$

Stellt man nun durch $\frac{1}{\sin\psi_1}$ und $\frac{1}{\sin\psi_2}$ den größten und kleinsten Werth von $\frac{a}{b}$ dar, und bemerkt, daß in diesem Falle ebenso, wie in dem vorhergehenden, die günstigsten Werthe von α und β diejenigen sind, durch welche die negativ genommenen Werthe der Formel (12) für ψ_1 und ψ_2 dem Maximum (13) gleich werden; so erhält man die doppelte Gleichung

$$1-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=-\left(1-\frac{\alpha}{\cos\psi_1}+\beta\tang\psi_1\right)=-\left(1-\frac{\alpha}{\cos\psi_2}+\beta\tang\psi_2\right).$$

Die letztere ergibt nach gehöriger Reduktion

$$\alpha=\beta\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)},$$

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\beta\sqrt{\left[\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)}{\sin^2\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)}-1\right]}=\beta\sqrt{\frac{\cos\psi_1\cdot\cos\psi_2}{\sin^2\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)}},$$

$$\frac{\alpha}{\cos\psi_1}-\beta\tang\psi_1=\beta\cot\tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2).$$

Substituirt man diese Werthe in die erstere Gleichung und reduzirt gehörig; so kommt

$$\beta=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)+\sqrt{\cos\psi_1\cos\psi_2}}\quad\ldots\ldots(15)$$

$$\alpha=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)+\sqrt{\cos\psi_1\cos\psi_2}}\quad\ldots\ldots(16).$$

Der größte Fehler ist nach der Formel (14) durch

$$1-\frac{2\sqrt{\cos\psi_1\cos\psi_2}}{\cos\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)+\sqrt{\cos\psi_1\cos\psi_2}}\quad\ldots\ldots(17)$$

dargestellt.

Um die vorstehenden Formeln zur logarithmischen Rechnung fähig zu machen, setze man $\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1$ und $\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)}=\frac{1}{\sin\varphi_2}$; alsdann erhält man anstatt der obigen Gleichungen $\alpha=\frac{\beta}{\sin\varphi_2}$, $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\beta\cot\varphi_2$ und

$\frac{\alpha}{\cos\psi_1} - \beta \operatorname{tang}\psi_1 = \beta \cot\varphi_1$, und darauf für die Gleichungen (15), (16) und (17)

$$\beta = \frac{2}{\cot\varphi_1 + \cot\varphi_2} = \frac{2\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \ldots \quad (18),$$

$$\alpha = \frac{2}{\sin\varphi_2 (\cot\varphi_1 + \cot\varphi_2)} = \frac{2\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \ldots \quad (19);$$

$$\text{größter Fehler} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \ldots \quad (20).$$

Wenn der kleinste Werth von a gleich $1\frac{1}{10}b$ und der größte unendlich ist; so wird die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 1{,}1319\, a - 0{,}72636\, b \quad \ldots \quad (21)$$

mit einem größtmöglichen Fehler von

0,1319 oder nahe $\frac{1}{7}$.

Wenn der kleinste Werth von a gleich $2b$ und der größte unendlich ist; so hat man

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 1{,}018623\, a - 0{,}272944\, b \quad \ldots \quad (22)$$

mit einem größtmöglichen Fehler von

0,0186 oder nahe $\frac{1}{52}$.

(Der Gang der Untersuchung bei der Entwickelung der vorstehenden Lehrsätze ist nicht derselbe, den Poncelet zu diesem Behufe eingeschlagen hat).

Tabelle I.

Die numerischen Werthe der vollständigen elliptischen Funktionen der ersten und zweiten Art für die Werthe des Models k, welche einem jeden Grade des Winkels arc sin k entsprechen.

arc sin k	F_1	E_1	arc sin k	F_1	E_1
0°	1,57079	1,57079			
1	1,57091	1,57067	46	1,86914	1,34180
2	1,57127	1,57031	47	1,88480	1,33286
3	1,57187	1,56972	48	1,90108	1,32384
4	1,57271	1,56888	49	1,91799	1,31472
5	1,57379	1,56780	50	1,93558	1,30553
6	1,57511	1,56649	51	1,95386	1,29627
7	1,57667	1,56494	52	1,97288	1,28695
8	1,57848	1,56316	53	1,99266	1,27757
9	1,58054	1,56114	54	2,01326	1,26814
10	1,58284	1,55888	55	2,03471	1,25867
11	1,58539	1,55639	56	2,05706	1,24918
12	1,58819	1,55368	57	2,08035	1,23966
13	1,59125	1,55073	58	2,10465	1,23012
14	1,59456	1,54755	59	2,13002	1,22058
15	1,59814	1,54415	60	2,15651	1,21105
16	1,60197	1,54052	61	2,18421	1,20153
17	1,60608	1,53666	62	2,21319	1,19204
18	1,61045	1,53259	63	2,24354	1,18258
19	1,61510	1,52830	64	2,27537	1,17317
20	1,62002	1,52379	65	2,30878	1,16382
21	1,62523	1,51907	66	2,34390	1,15454
22	1,63072	1,51414	67	2,38087	1,14534
23	1,63651	1,50900	68	2,41984	1,13624
24	1,64260	1,50366	69	2,46099	1,12724
25	1,64899	1,49811	70	2,50455	1,11837
26	1,65569	1,49236	71	2,55073	1,10964
27	1,66271	1,48642	72	2,59981	1,10106
28	1,67005	1,48029	73	2,65213	1,09265
29	1,67773	1,47396	74	2,70806	1,08442
30	1,68575	1,46746	75	2,76806	1,07640
31	1,69411	1,46077	76	2,83267	1,06860
32	1,70283	1,45390	77	2,90256	1,06105
33	1,71192	1,44686	78	2,97856	1,05377
34	1,72139	1,43966	79	3,06172	1,04678
35	1,73124	1,43229	80	3,15338	1,04011
36	1,74149	1,42476	81	3,25530	1,03378
37	1,75216	1,41707	82	3,36986	1,02784
38	1,76325	1,40923	83	3,50042	1,02231
39	1,77478	1,40125	84	3,65185	1,01723
40	1,78676	1,39314	85	3,83174	1,01266
41	1,79922	1,38488	86	4,05275	1,00864
42	1,81215	1,37650	87	4,33865	1,00525
43	1,82560	1,36799	88	4,74271	1,00258
44	1,83956	1,35937	89	5,43490	1,00075
45	1,85407	1,35064			

Tabelle II.

Reibung ebener Flächen, nachdem sie einige Zeit miteinander in Berührung gewesen sind.

Berührungsflächen.	Lage der Fibern.	Zustand der Flächen.	Reibungskoeffizient f.	Reibungswinkel φ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel ...	trocken	0,62	31° 48′
	parallel ...	mit trockener Seife abgerieben	0,44	23 45
	rechtwinklig .	trocken	0,54	28 22
	rechtwinklig .	mit Wasser benetzt	0,71	35 23
	Hirnholz des Einen auf dem Längenholze des anderen	trocken	0,43	23 16
Eichenholz auf Ulmenholz .	parallel ...	trocken	0,38	20 49
Ulmenholz auf Eichenholz .	parallel ...	trocken	0,69	34 37
	parallel ...	mit trockener Seife abgerieben	0,41	22 18
	rechtwinklig .	trocken	0,57	29 41
Eschen-, Tannen-, Buchen-, Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel ...	trocken	0,53	27 56
Lohgares Leder auf Eichenholz	das Leder platt	trocken	0,61	31 23
	das Leder auf d. hohen Kante	trocken	0,43	23 16
		mit Wasser benetzt	0,79	38 19
Schwarzes Riemenleder auf einer ebenen Fläche von Eichenholz	parallel....	trocken	0,74	36 30
Schwarzes Riemenleder auf einer Trommel von Eichenholz	rechtwinklig .	trocken	0,47	25 11
Geflochtener Hanf auf Eichenholz	parallel....	trocken	0,50	26 34
	parallel....	mit Wasser benetzt	0,87	41 2
Hanfne Seile auf Eichenholz	parallel....	trocken	0,80	38 40
Schmiedeeisen auf Eichenholz	parallel....	trocken	0,62	31 48
	parallel....	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Gußeisen auf Eichenholz ..	parallel....	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Messing auf Eichenholz ...	parallel....	trocken	0,62	31 48
Liederung eines Kolbens von Rindleder auf Gußeißen	platt oder auf d. hohen Kante	mit Wasser benetzt	0,62	31 48
		mit Öl, Talg oder Schweinefett	0,12	6 51
Schwarzes Riemenleder auf einer gußeisernen Rolle	platt	trocken	0,28	15 39
		mit Wasser benetzt	0,38	20 49
Gußeisen auf Gußeisen ...	....	trocken	0,16*	9 6
Schmiedeeisen auf Gußeisen	....	trocken	0,19	10 46
Eichenholz, Ulmenholz, Hainbuchenholz, Schmiedeeisen, Gußeisen und Bronze, je zwei aufeinander	.....	mit Talg ...	0,10**	5 43
		mit Öl oder Schweinefett	0,15†	8 32

*) Die Flächen blieben etwas fettig.
**) Wenn die Berührung nicht lange genug gedauert hatte, um das Fett auszupressen.
†) Wenn die Berührung so lange gedauert hatte, daß das Fett ausgepreßt war.

Berührungsflächen.	Reibungskoeffizient f.	Reibungswinkel φ.	
Versuche von Morin.			
Oolith auf Oolith	0,74	36°	30′
Muschelkalk auf Oolith	0,75	36	52
Ziegelstein auf Oolith	0,67	33	50
Eichenholz auf Oolith, das Holz vor Hirn . .	0,63	32	13
Schmiedeeisen auf Oolith	0,49	26	7
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70	35	0
Oolith auf Muschelkalk	0,75	36	52
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67	33	50
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	0,42	22	47
Eichenholz auf Muschelkalk	0,64	32	38
Oolith auf Oolith, mit einer Zwischenlage von Mörtel, bestehend aus drei Theilen feinem Sande und einem Theile hydraulischem Kalke . . .	0,74*	36	30
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine, gut behauen	0,74	36	30
Harter Kalkstein auf dito, dito	0,75	36	52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33	50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,63	32	13
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,49	26	7
Harter Kalkstein auf hartem Kalksteine, gut behauen	0,70	35	0
Weicher Kalkstein auf dito, dito	0,75	36	52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33	50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,64	32	37
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,42	22	47
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine, mit frischem Mörtel	0,74	36	30
Versuche von verschiedenen anderen Beobachtern.			
Weicher Quadersandstein auf demselben (Rennie.) .	0,71	35	23
derselbe auf demselben, mit frischem Mörtel, (Rennie.)	0,66	33	26
Harter, polirter Kalkstein auf demselben . .	0,58	30	7
Kalkstein auf Kalkstein, beide Flächen mit dem Meißel rauh gemacht (Bonchardi.) . . .	0,78	37	58
Gut bearbeiteter Granit auf rauhem Granit (Rennie.)	0,66	33	26
desgl. mit frischem Mörtel (Rennie.) .	0,49	26	7
Hölzerner Kasten auf Steinpflaster (Regnier.) .	0,58	30	7
desgl. auf geschlagener Erde (Herbert.) .	0,33	18	16
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von Thon	0,51	27	2
desgl. desgl. der Thon feucht und milde	0,34	18	47
desgl. desgl. der Thon feucht und mit dickem Sande bedeckt (Grève.) . .	0,40	21	48

*) Nach einer Berührung von zehn bis funfzehn Minuten.

Tabelle III.

Reibung ebener Flächen, welche aufeinander in Bewegung sind.

Berührungsflächen.	Länge der Fiebern.	Zustand der Flächen.	Reibungskoeffizient f.	Reibungswinkel φ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,48	25° 39′
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,16	9 6
	rechtwinklig	trocken	0,34	18 47
	rechtwinklig	mit Wasser benetzt	0,25	14 3
	Hirnholz auf Längenholz	trocken	0,19	10 46
Ulmenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,43	23 17
	rechtwinklig	trocken	0,45	24 14
	parallel	mit Wasser benetzt	0,25	14 3
Eschen-, Tannen-, Buchen-, Wildes Birnbaum- und Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,36 bis 0,40	19 48 / 21 49
Schmiedeeisen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
		mit Wasser	0,26	14 35
		mit trockener Seife abgerieben	0,21	11 52
Gußeisen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,49	26 7
		mit Wasser	0,22	12 25
		mit trockener Seife abgerieben	0,19	10 46
Messing auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
Schmiedeeisen auf Ulmenholz	parallel	trocken	0,25	14 3
Gußeisen auf Ulmenholz	parallel	trocken	0,20	11 19
Schwarzes Riemenleder auf Eichenholz	parallel	trocken	0,27	15 7
Lohgares Leder auf Eichenholz	platt oder auf der hohen Kante	trocken	0,30 bis 0,35	16 42 / 19 18
		mit Wasser	0,29	16 11
Lohgares Leder auf Gußeisen und Bronze	desgl.	trocken	0,56	29 15
		mit Wasser	0,36	19 48
		mit Fett eingerieben und in Wasser getaucht	0,23	12 58
		mit Öl	0,15	8 32
Hanf in Fäden oder in Seilen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,52	27 29
	rechtwinklig	mit Wasser	0,33	18 16

Berührungsflächen.	Lage der Fibern.	Zustand der Flächen.	Reibungskoeffizient f.	Reibungswinkel φ.
Versuche von Morin.				
Eichen- und Ulmenholz auf Gußeisen	parallel	trocken	0,38	20° 49′
Wildes Birnbaumh. auf Gußeisen	parallel	trocken	0,44	23 45
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	parallel	trocken	0,44 *	23 45
Schmiedeeisen auf Gußeisen und Bronze	parallel	trocken	0,18 **	10 13
Gußeisen auf dito und dito .	parallel	trocken	0,15	8 32
Bronze auf Bronze	parallel	trocken	0,20	11 19
Bronze auf Gußeisen	parallel	trocken	0,22	12 25
Bronze auf Schmiedeeisen . .	parallel	trocken	0,16 **	9 6
Eichen-, Ulmen-, Hainbuchen-, Wildes Birnbaumholz, Gußeisen, Schmiedeeisen und Stahl, je zwei aufeinander oder auf sich selbst	parallel . . .	auf die gewöhnliche Weise mit Talg, Schweinefett, Öl, Wagenschmiere bestrich.	0,07 bis 0,08 †	4 1 bis 4 35
		etwas fettig . .	0,15	8 32
Oolith auf Oolith	. . . . .	trocken	0,64	32 37
Muschelkalk auf Oolith . . .	. . . . .	trocken	0,67	33 50
Ziegelstein auf Oolith	. . . . .	trocken	0.65	33 2
Eichenholz auf Oolith . . .	das Holz vor Hirn	trocken	0,38	20 49
Schmiedeeisen auf Oolith . .	. . . . .	trocken	0,69	34 37
Muschelkalk auf Muschelkalk .	. . . . .	trocken	0,38	20 49
Oolith auf Muschelkalk . . .	. . . . .	trocken	0,65	33 2
Ziegelstein auf Muschelkalk . .	. . . . .	trocken	0,60	30 58
Eichenholz auf Muschelkalk .	das Holz vor Hirn	trocken	0,38	20 49
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	. . . . .	trocken	0,24	13 30
		mit Wasser benetzt	0,30	16 42

*) Die Flächen nutzen sich ab, wenn sie nicht geschmiert werden.

**) Die Flächen waren noch etwas fettig.

†) Wenn das Fett erneuert und gleichförmig vertheilt wird; so kann dieser Koeffizient bis auf 0,05 herabgedrückt werden.

Tabelle IV.

Reibung der Zapfen oder Axen auf ihren Lagern im Zustande der Bewegung.

Nach den Versuchen von Morin.

Berührungsflächen.	Zustand der Flächen.	Reibungskoeffizient f, wenn die Schmiere erneuert wird: in der gewöhnlichen Weise.	Reibungskoeffizient f, wenn die Schmiere erneuert wird: ununterbrochen.	Reibungswinkel φ.
Gußeiserne Axen auf gußeisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg und dünner Wagenschmiere bestrichen	0,07 bis 0,08	0,054	4° 0′ 4 35 3 6
	mit denselben Fetten und Wasser	0,08	0,28	4 35 15 39
	mit Asphalt	0,054	0,19	3 6 10 46
	fettig	0,14	.	7 58
	fettig und angefeuchtet . .	0,14	.	7 58
Gußeiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett Talg und dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	fettig	0,16	.	9 6
	fettig und angefeuchtet . .	0,16	.	9 6
	kaum fettig	0,19	.	10 46
	trocken	0,18	.	10 12
Gußeiserne Axen auf Lagern von Pockenholz (vulgo Pockholz.)	mit Öl oder Schweinefett	. .	0,09	5 9
	mit dergl. abgerieben . .	0,10	.	5 43
	mit einer Mischung aus Schweinefett und Molybden abgerieben	0,14	.	7 58
Schmiedeeiserne Axen auf gußeisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett Talg oder dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
Schmiedeeiserne Axen auf bronzenen Lagern.	mit Baumöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	mit dicker Wagenschmiere	0,09	.	5 9
	fettig und angefeuchtet . .	0,19	.	10 46
	kaum fettig	0,25	.	14 2
Schmiedeeiserne Axen auf Lagern von Pockenholz (vulgo Pockholz)	mit Öl oder Schweinefett geschmiert	0,11	.	6 17
	fettig	0,19	.	10 46
Bronzene Axen auf bronzenen Lagern	mit Öl	0,10	.	5 43
	mit Schweinefett	0,09	.	5 9
Bronzene Axen auf gußeisernen Lagern	mit Öl oder Talg	. .	0,045—0,052	2 35 2 59
Axen von Pockenholz auf gußeisernen Lagern	mit Schweinefett	0,12	.	6 51
	fettig	0,15	.	8 32
Axen von Pockenholz auf Lagern von Pockenhol	mit Schweinefett	. .	0,07	4 0

Tabelle V.

Reibungskoeffizienten unter fortwährend bis zur Gränze der Abnutzung anwachsendem Drucke.

Nach den Versuchen von G. Rennie.

Druck auf den Quadratzoll	Reibungskoeffizienten			
	Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen.	Schmiedeeisen auf Gußeisen	Stahl auf Gußeisen.	Messing auf Gußeisen.
33,5 ℔	0,140	0,174	0,166	0,157
180,9	0,250	0,275	0,300	0,225
217,1	0,271	0,292	0,333	0,219
253,3	0,285	0,321	0,340	0,214
289,5	0,297	0,329	0,344	0,211
325,7	0,312	0,333	0,347	0,215
361,9	0,350	0,351	0,351	0,206
398,1	0,376	0,353	0,353	0,205
434,3	0,376	0,365	0,354	0,208
470,4	0,395	0,366	0,356	0,221
506,6	0,403	0,366	0,357	0,223
542,8	0,409	0,367	0,358	0,233
579,0		0,367	0,359	0,234
615,2		0,367	0,367	0,235
651,4		0,376	0,403	0,233
687,6		0,434		0,234
723,8				0,235
759,9				0,232
796,1				0,273

Tabelle VI.

Steifigkeit der Seile.

Werthe der Konstanten **D** und **E** nach den Versuchen von Coulomb.

Der Halbmesser **R** der Rolle ist in Fußen zu nehmen, die Spannung $\mathbf{P}_2$ in ℔.

Nro. 1. Neue trockene Seile. Steifigkeit proportional dem Quadrate des Umfanges.

Umfang des Seiles in Zollen.	Werth von D.	Werth von E.
1	0,13155	0,00269
2	0,52620	0,01077
4	2,10482	0,04309
8	8,41927	0,17238

Nro. 2. Neue in Wasser getauchte Seile. Steifigkeit proportional dem Quadrate des Umfanges.

Umfang des Seiles in Zollen	Werth von D.	Werth von E.
1	0,26310	0,00269
2	1,05241	0,01077
4	4,20964	0,04309
8	16,83855	0,17238

Quadrate der Verhältnisse der zwischenliegenden Umfänge zu denen der Tabelle.

Verhältnisse	Quadrate
1,0	1,00
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
2,0	4,00

Nro. 3. Halb abgenutzte trockene Seile. Steifigkeit proportional der Potenz $\frac{3}{2}$ des Umfanges.

Umfang des Seiles in Zollen.	Werth von D.	Werth von E.
1	0,14417	0,00295
2	0,40772	0,00834
4	1,15285	0,02360
8	3,26128	0,06675

Nro. 4. Halb abgenutzte nasse Seile. Steifigkeit proportional der Potenz $\frac{3}{2}$ des Umfanges.

Umfang des Seiles in Zollen.	Werth von D.	Werth von E.
1	0,28834	0,00295
2	0,81542	0,00834
4	2,30608	0,02360
8	6,52159	0,06675

Potenzen vom Grade $\frac{3}{2}$ der Verhältnisse der zwischenliegenden Umfänge zu denen der Tabelle.

Verhältnisse	Potenzen $\frac{3}{2}$
1,0	1,000
1,1	1,154
1,2	1,315
1,3	1,482
1,4	1,657
1,5	1,837
1,6	2,024
1,7	2,217
1,8	2,415
1,9	2,619
2,0	2,828

Nro. 5. Getheerte Seile. Steifigkeit proportional der Anzahl der Stränge.

Anzahl der Stränge	Werth von D.	Werth von E.
6	0,36015*	0,00413
15	0,72105*	0,00964
30	1,15861	0,01996

Bemerk. Um die Konstanten **D** und **E** für Seile zu bestimmen, deren Umfänge zwischen den in den Tabellen 1 bis 4 angegebenen liegen; so ermittele man das Verhältniß des gegebenen Umfanges zu dem nächsten, welcher in den Tabellen enthalten ist, und suche dieses Verhältniß in der ersten Spalte der Hülfstabelle an der rechten Seite. Die entsprechende Zahl in der zweiten Spalte dieser Hülfstabelle ergibt einen Faktor, mit welchem die Werthe von **D** und **E** für den nächsten Umfang in den Haupttabellen multiplizirt werden müssen, um ihre Werthe für den gegebenen Umfang zu erhalten. Wollte man z. B. die Werthe **D** und **E** für ein neues trockenes Seil mit einem Umfange von 5,2 Zoll bestimmen; so ist das Verhältniß von 5,2 zu dem nächsten Umfange von 4 Zoll der Tabelle $= \frac{5{,}2}{4} = 1{,}3$ Für dieses Verhältniß ergibt die Hülfstabelle den Faktor 1,69, mit welchem also die Werthe 2,10482 und 0,04309 von **D** und **E**, welche einem Umfange von 4 Zoll entsprechen, zu multipliziren sind, um die entsprechenden Werthe für einen Umfang von 5,2 Zoll zu erhalten.

---

*) Im englischen Originale findet sich an dieser Stelle der Tabelle über die Steifigkeit der getheerten Seile, ebenso wie in der von Navier und Poncelet mitgetheilten Tabellen, von welchen letzteren die vorstehende abgeleitet ist, eine Anomalie, indem daselbst der Werth 0,72105 der Konstante **D** an der Stelle des Werthes 0,36015, und umgekehrt, steht. Es ist augenscheinlich, daß jene Tabellen in diesen Angaben einen Irrthum enthalten, behuf dessen Elimination ich mir die obige Konjektur erlaubt habe.

Tabelle VII.

Werthe der Arbeit, welche der Mensch und die Thiere unter verschiedenen Umständen zu leisten vermögen.

Nummer.	Natur der Arbeit.	Gehobenes Gewicht oder ausgeübter Druck.	Geschwindigkeit in der Sekunde.	Arbeit in der Sekunde.	Dauer der täglichen Arbeitszeit.	Tägliche Arbeit.
		Pfund.	Fuß.	Pf. × Fß.	Stunden	Pf. × Fß.
	Vertikale Hebung der Lasten.					
1	Ein Mensch, welcher eine flache Rampe oder Treppe ohne Belastung hinaufsteigt, sodaß seine Arbeit in der Hebung des Gewichtes seines Körpers besteht	140	0,5	70	8	2 016 000
2	Ein Arbeiter, welcher an einem über eine Rolle gehenden Seile Lasten in die Höhe zieht und das Seil leer zurückgehen läßt	38	0,65	24,7	6	533 520
3	Ein Arbeiter, welcher mit den Händen Lasten in die Höhe hebt	42	0,55	23,1	6	498 960
4	Ein Arbeiter, welcher auf seinem Rücken Lasten eine flache Rampe oder Treppe hinaufträgt und leer zurückkehrt	140	0,13	18,2	6	393 120
5	Ein Arbeiter, welcher in einer Schiebkarre Materialien eine Rampe von $\frac{1}{12}$ Neigung hinaufschaft und leer zurückkehrt	130	0,065	8,45	10	304 200
6	Ein Arbeiter, welcher vermittelst der Schaufel Erde auf eine mittlere Höhe von 5 Fuß hebt	5,8	1,3	7.54	10	271 440
	Wirkung auf Maschinen.					
	Ein Arbeiter welcher auf ein Spillrad wirkt					
7	a) in der Höhe der Axe des Rades . . .	130	0,5	65	8	1 872 000
8	b) am unteren Theile des Rades oder unter einem Winkel von 24°	26	2,25	58,5	8	1 684 800
9	Ein Arbeiter, welcher im Gehen in horizontaler Richtung einen Druck oder Zug ausübt	26	1,9	49,4	8	1 422 720
10	Ein Arbeiter, welcher auf eine Kurbel wirkt	17,5	2,4	42	8	1 209 600
11	Ein geübter Arbeiter, welcher in vertikaler Richtung abwechselnd einen Druck oder Zug ausübt	10,5	3,5	36,75	8	1 058 400
12	Ein Pferd, welches vor ein gewöhnliches Fuhrwerk gespannt ist und im Schritte geht .	150	2,9	435	10	15 660 000
13	Ein Pferd, welches an einem Göpel angespannt ist und im Schritte geht	96	2,9	278,4	8	8 017 920
14	Ein Pferd, welches an einem Göpel angespannt ist und sich im Trabe bewegt . .	64	6,4	409,6	4,5	6 635 520
15	Ein Ochs, welcher an einem Göpel angespannt ist und im Schritte geht	140	1,9	266	8	7 660 800
16	Ein Maulesel, welcher an einem Göpel angespannt ist und im Schritte geht . . .	64	2,9	185,6	8	5 345 280
17	Ein Esel, welcher an einem Göpel angespannt ist und im Schritte geht	30	2,6	78	8	2 246 400

Tabelle VIII.

Bruchwinkel Ψ eines Kreisgewölbes, dessen Belastung aus demselben Materiale besteht, wie die Wölbsteine, und unter einem gegebenen Winkel gegen den Horizont geneigt ist.
(§. 346.)

$\alpha =$ dem Verhältnisse der Gewölbstärke zu dem inneren Halbmesser (§. 338.)
$c =$ dem Verhältnisse der Höhe der Belastung über dem Scheitel zu dem inneren Halbmesser, sodaß $c = \beta(1+\alpha)$ ist (§. 340).
$\iota =$ der Neigung der Oberfläche der Belastung gegen den Horizont (§. 340.)

(Nach Garidel.)

$\iota = 0.$

α	$c=0$	$c=0{,}1$	$c=0{,}2$	$c=0{,}3$	$c=0{,}4$	$c=0{,}5$	$c=1{,}0$
0,05	68,0°	59,19°	54,04°	51,15°	49,35°	48,20°	45,74°
0,10	65,4	60,48	57,70	56,01	54,93	54,17	52,34
0,15	64,0	61,3	59,7	58,69	58,0	57,49	56,21
0,20	63,1	61,7	60,88	60,30	59,90	59,60	58,80
0,25	62,24	61,76	61,44	61,22	61,05	60,94	60,59
0,30	61,3	61,42	61,54	61,60	61,66	61,67	61,81
0,35	60,17	60,80	61,21	61,54	61,78	61,98	62,56
0,40	58,8	59,8	60,52	61,05	61,48	61,67	62,9
0,45	57,32	58,53	59,45	60,19	60,80	61,28	62,85
0,50	55,63	56,97	58,09	58,98	59,72	60,34	62,40

$\iota = 7^0\,30'.$

α	$c=0$	$c=0{,}1$	$c=0{,}2$	$c=0{,}3$	$c=0{,}4$	$c=0{,}5$	$c=1{,}0$
0,05	68,3°	57,3°	51,69°	48,61°	47,84°	46,11°	44,85°
0,10	64,3	58,68	55,95	54,52	53,64	53,03	51,68
0,15	62,43	59,67	58,33	57,55	57,00	56,61	55,66
0,20	61,48	60,42	59,72	59,35	59,07	58,87	58,29
0,25	60,75	60,55	60,44	60,38	60,33	60,21	60,17
0,30	60,09	60,49	60,77	60,95	61,08	61,18	61,48
0,35	59,27	60,12	60,62	61,02	61,33	61,59	62,31
0,40	58,25	59,33	60,11	60,72	61,18	61,57	62,7
0,45	57,11	58,35	59,29	60,05	60,67	61,16	62,78
0,50	55,82	57,13	58,21	59,08	59,81	60,41	62,45

$\iota = 15^0$.

a	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	64,8°	50,5°	46,95°	45,69°	45,03°	44,67°	43,9°
0,10	59,3	55,07	53,34	52,47	51,99	51,69	50,93
0,15	59,08	57,32	56,65	56,05	55,75	55,55	55,05
0,20	59,06	58,60	58,35	58,20	58,10	58,02	57,84
0,25	59,05	59,28	59,42	59,53	59,60	59,65	59,79
0,30	58,90	59,57	59,98	60,26	60,48	60,66	61,15
0,35	58,53	59,41	60,09	60,57	60,93	61,17	62,0
0,40	57,99	59,08	59,87	60,48	60,95	61,36	62,6
0,45	57,26	58,43	59,34	60,06	60,67	61,15	62,7
0,50	56,38	57,61	58,58	59,36	60,06	60,64	62,5

$\iota = 22^0\,30'$.

a	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	36,1°	41,2°	42,0°	42,3°	42,6°	42,7°	42,9°
0,10	50,5	50,3	50,19	50,17	50,14	50,13	50,11
0,15	54,25	54,31	54,35	54,35	54,36	54,36	54,38
0,20	56,17	56,60	56,82	56,95	57,04	57,11	57,28
0,25	57,27	57,93	58,33	58,61	58,79	58,95	59,33
0,30	57,85	58,68	59.23	59,60	59.93	60,16	60,83
0,35	58,07	59,01	59,70	60,21	60,61	60,91	61,85
0,40	58,02	59,02	59,79	60,38	60,87	61,25	62,2
0,45	57,74	58,78	59,60	60,26	60,82	61,27	62,7
0,50	57,30	58,31	59,16	59,88	60,47	61,00	62,9

$\iota = 30^0$.

a	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,3°	36,2°	38,4°	39,57°	40,28°	40,77°	41,9°
0,10	43,3	46,06	47,25	47,90	48,30	48,59	49.24
0,15	50,07	51,46	52,18	52,63	52,94	53,14	53,68
0,20	53,66	54,69	55,27	55,67	55,96	56,16	56,72
0,25	55,80	56,72	57,30	57,72	58,01	58,23	58,89
0,30	57,13	58,01	58,62	59,06	59,40	59,69	60,48
0,35	57,93	58,80	59,43	59,94	60,33	60,66	61,64
0,40	58,33	59,20	59,89	60,42	60,87	61,23	62,39
0,45	58,47	59,33	60,03	60,61	61,08	61,48	62,87
0,50	58,38	59,22	59,93	60,53	61,03	61,47	63,0

$\iota = 37^0\,30'$.

α	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,1^0	34,3^0	36,28^0	37,59^0	38,48^0	39,16^0	40,82^0
0,10	40,98	43,59	45,09	46,01	46,67	47,14	48,35
0,15	47,71	49,40	50,43	51,12	51,61	51,96	52,93
0,20	52,01	53,23	54,01	54,54	54,94	55,24	56,10
0,25	54,87	55,80	56,45	56,94	57,29	57,59	58,41
0,30	56,77	57,58	58,16	58,62	58,98	59,26	60,16
0,35	58,04	58,78	59,34	59,81	60,17	60,47	61,45
0,40	58,89	59,58	60,13	60,60	60,97	61,30	62,4
0,45	59,38	60,06	60,62	61,07	61,47	61,83	63,0
0,50	59,69	60,29	60,84	61,26	61,72	62,07	63,3

$\iota = 45^0$.

α	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,3^0	33,68^0	35,46^0	36,36^0	37,22^0	38,0^0	39,9^0
0,10	40,6	42,4	43,7	44,64	45,35	45,92	47,45
0,15	46,77	48,20	49,18	49,93	50,47	50,92	52,15
0,20	51,23	52,27	53,05	53,64	54,07	54,42	55,47
0,25	54,42	55,22	55,84	56,31	56,70	57,01	57,97
0,30	56,72	57,38	57,90	58,30	58,65	58,94	59,85
0,35	58,35	58,94	59,40	59,79	60,11	60,38	61,30
0,40	59,56	60,09	60,52	60,89	61,19	61,46	62,4
0,45	60,40	60,89	61,29	61,67	61,97	62,24	63,2
0,50	60,99	61,43	61,8	62,2	62,5	62,8	63,8

Tabelle IX.

Horizontaler Schub eines Kreisgewölbes, dessen innerer Halbmesser gleich der Einheit ist, wenn das Gewicht eines jeden Kubikfußes seines Materiales und des der Belastung zur Einheit angenommen wird.

(Um den horizontalen Schub irgend eines anderen Bogens zu finden, hat man den entsprechenden Werth aus der Tabelle mit dem Quadrate des inneren Halbmessers und mit dem Gewichte Eines Kubikfußes des Materiales zu multipliziren.)

$\iota = 0.$

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}4$ $\frac{P}{r_2}$	$c=0{,}5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1{,}0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,08174	0,14797	0,21762	0,28877	0,36060	0,43277	0,79541
0,10	0,10279	0,16370	0,22588	0,28862	0,35164	0,41481	0,73161
0,15	0,11894	0,17480	0,23111	0,28764	0,34429	0,40100	0,68504
0,20	0,13073	0,18191	0,23322	0,28460	0,33603	0,38747	0,64488
0,25	0,13871	0,18553	0,23237	0,27922	0,32607	0,37293	0.60727
0,30	0,14333	0,18604	0,22874	0,27145	0,31416	0,35687	0,57041
0,35	0,14504	0,18379	0,22258	0,26140	0,30023	0,33907	0,53335
0,40	0,14422	0,17913	0,21415	0,24924	0,28437	0,31953	0,49560
0,45	0,14124	0,17240	0,20374	0,23520	0,26674	0,29835	0,45693
0,50	0,13649	0,16396	0,19168	0,21957	0,24760	0,27573	0,41728

$\iota = 7^0\ 30.$

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}3$ $\frac{P}{r_2}$	$c=0{,}4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0{,}5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1{,}0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,06180	0,12867	0,19937	0,27125	0,34356	0,41606	0,77944
0,10	0,08514	0,14666	0,20930	0,27237	0,33561	0,39895	0,71618
0,15	0,10380	0,16001	0,21657	0,27326	0,33003	0,38683	0,67110
0,20	0,11813	0,16948	0,22089	0,27237	0,32384	0,37533	0,63286
0,25	0,12870	0,17557	0,22244	0,26932	0,31619	0,36306	0,59743
0,30	0,13598	0,17866	0,22134	0,26403	0,30673	0,34943	0,56295
0,35	0,14040	0,17909	0,21783	0,25661	0,29542	0,33424	0,52846
0,40	0,14234	0,17718	0,21215	0,24720	0,28230	0,31744	0,49344
0,45	0,14211	0,17323	0,20454	0,23598	0,26751	0,29910	0,45763
0,50	0,14003	0,16753	0,19528	0,22319	0,25124	0,27938	0,42096

$\iota = 15^0.$

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,05310	0,12265	0,19488	0,26748	0,34018	0,41293	0,77681
0,10	0,07903	0,14170	0,20493	0,26832	0,33176	0,39524	0,71277
0,15	0,09990	0,15658	0,21336	0,27022	0,32708	0,38395	0,66840
0,20	0,11631	0,16781	0,21931	0,27083	0,32234	0,37386	0,63145
0,25	0,12894	0,17582	0,22268	0,26955	0,31643	0,36330	0,59767
0,30	0,13835	0,18096	0,23361	0,26627	0,30895	0,35163	0,56510
0,35	0,14494	0,18355	0,22224	0,26098	0,29976	0,33855	0,53271
0,40	0,14905	0,18384	0,21878	0,25380	0,28888	0,32399	0,49995
0,45	0,15097	0,18212	0,21344	0,24488	0,27641	0,30800	0,46652
0,50	0,15099	0,17860	0,20642	0,23439	0,26247	0,29065	0,43232

$\iota = 22^0\ 30'.$

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,06102	0,13346	0,20621	0,27899	0,35178	0,42458	0,78857
0,10	0,08700	0,15053	0,21407	0,27760	0,34113	0,40466	0,72233
0,15	0,10877	0,16567	0,22257	0,27947	0,33638	0,39328	0,67778
0,20	0,12635	0,17785	0,22936	0,28087	0,33239	0,38391	0,64150
0,25	0,14037	0,18716	0,23399	0,28042	0,32767	0,37453	0,60886
0,30	0,15129	0,19381	0,23640	0,27902	0,32166	0,36432	0,57773
0,35	0,15948	0,19804	0,23669	0,27540	0,31415	0,35292	0,54700
0,40	0,16525	0,20005	0,23497	0,26999	0,30506	0,34017	0,51608
0,45	0,16883	0,20005	0,23141	0,26289	0,29444	0,32604	0,48460
0,50	0,17047	0,19824	0,22617	0,25423	0,28238	0,31060	0,45241

$\iota = 30^0.$

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,09355	0,16408	0,23605	0,30845	0,38101	0,45365	0,81731
0,10	0,11297	0,17592	0,23922	0,30263	0,36609	0,42957	0,74711
0,15	0,13295	0,18962	0,24640	0,30323	0,36009	0,41696	0,70138
0,20	0,15038	0,20172	0,25314	0,30459	0,35606	0,40755	0,66506
0,25	0,16493	0,21160	0,25834	0,30513	0,35193	0,39876	0,63299
0,30	0,17673	0,21917	0,26170	0,30427	0,34688	0,38951	0,60282
0,35	0,18599	0,22452	0,26314	0,30182	0,34055	0,37930	0,57332
0,40	0,19293	0,22777	0,26271	0,29773	0,33280	0,36791	0,54380
0,45	0,19774	0,22906	0,26050	0,29202	0,32361	0,35524	0,51385
0,50	0,20060	0,22854	0,25661	0,28476	0,31299	0,34128	0,48327

$\iota = 37^0\,30'$.

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,14749	0,21733	0,28854	0,36038	0,43255	0,50490	0,86784
0,10	0,15949	0,22174	0,28457	0,34768	0,41093	0,47426	0,79141
0,15	0,17605	0,23233	0,28886	0,34553	0,40226	0,45904	0,74322
0,20	0,19209	0,24321	0,29448	0,34583	0,39722	0,44865	0,70598
0,25	0,20627	0,25282	0,29948	0,34619	0,39294	0,43972	9,67382
0,30	0,21827	0,26066	0,30314	0,34568	0,38825	0,43085	0,64406
0,35	0,22805	0,26659	0,30521	0,34388	0,38259	0,42133	0,61529
0,40	0,23570	0,27060	0,30558	0,34062	0,37571	0,41083	0,58673
0,45	0,24130	0,27275	0,30427	0,33586	0,36749	0,39916	0,55787
0,50	0,24499	0,27312	0,30132	0,32958	0,35789	0,38625	0,52845

$\iota = 45^0$.

α	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$e=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,23105	0,30081	0,37162	0,44305	0,51485	0,58688	0,94881
0,10	0,23318	0,29507	0,35754	0,42034	0,48333	0,54646	0,86300
0,15	0,24478	0,30079	0,35708	0,41355	0,47013	0,52678	0,81059
0,20	0,25819	0,30915	0,36028	0,41151	0,46281	0,51415	0,77124
0,25	0,27104	0,31752	0,36410	0,41074	0,45744	0,50417	0,73809
0,30	0,28248	0,32486	0,36731	0,40981	0,45235	0,49493	0,70803
0,35	0,29216	0,33073	0,36935	0,40803	0,44674	0,48547	0,67939
0,40	0,29997	0,33494	0,36998	0,40506	0,44016	0,47530	0,65123
0,45	0,30589	0,33745	0,36907	0,40072	0,43240	0,46412	0,62294
0,50	0,30996	0,33824	0,36657	0,39494	0,42334	0,45177	0,59419

Tabelle X.

Verschiedene mechanische Eigenschaften der wichtigsten in Konstruktionen verwendeten Materialien.

Bezeichnung der Materialien.	Spezifisches Gewicht.	Gewicht Eines Kubikfußes in Pfunden.	Absolute Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden. λ	Rückwirkende Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden $\varkappa$.	Elastizitäts-Model für den Quadratzoll in Pfunden E	Brechungskoeffizient für die relative Festigkeit auf den Quadratzoll in Pfunden ε.
1. Metalle.						
Blei, gegossen	11,4	752	1900	. . . .	730000	
gewalzt	. . .	. .	2000			
Bronze (Kanonengut,) gegossen	. . .	. .	34000	. . . .	4700000	
Eisen, Gußeisen . . .	7,2	475	19000	140000	17000000	40000
Schmiedeeisen	7,7	508	66000	90000	29000000	66000
Eisendrath . .	. . .	. .	90000	. . . .	26000000	
dito in Seilen .	. . .	. .	44000			
eiserne Ketten mit gewöhnlichen ovalen Gliedern	. . .	. .	35000			
dito mit geraden verbolzten Gliedern	. . .	. .	47000			
Gold, gegossen . . .	19,24	1270	21000			
Kupfer, gegossen . . .	8,7	574	20000			
gehämmert . .	8,9	587	35000			
Kupferdrath .	9,	594	70000	. . . .	19000000	
Messing, gegossen . .	8,2	541	18000	. . . .	9400000	
Messingdrath	8,4	554	70000	. . . .	15000000	
Platin, gegossen . . .	20,85	1376				
Quecksilber	13,59	897	. .			
Silber, gegossen . . .	10,4	686	42000	. . . .	4500000	
Silberdrath . .	. . .	. .	50000			
Stahl	7,8	515	110000	. . . .	37000000	
Zink, gegossen . . .	7,1	469	8800	. . . .	14000000	
gewalzt . . .	. . .	. .	7300			
Zinn, gegossen	7,3	482	4400	. . . .	4700000	
2. Sonstige Mineralien und künstliche Steine.						
Alabaster	2,7	178				
Basalt	2,8	185	1100	29000		

Bezeichnung der Materialien.	Spezifisches Gewicht.	Gewicht Eines Kubikfußes in Pfunden.	Absolute Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden λ	Rückwirkende Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden $\varkappa$.	Elastizitäts-Model für den Quadratzoll in Pfunden E	Brechungskoeffizient für die relative Festigkeit auf den Quadratzoll in Pfunden ε.
Erde, gestampft . . .	1,6	106				
lose	1,2	79				
Feuerstein	2,63	174				
Gerölle	1,4	92				
Gips, gebrannt . . .	1,2	79				
mit Wasser angerührt	1,58	104				
Gipsstein	2,4	158				
Glas, Tafelglas . . .	2,5	165	3000			
Gneiß	2,75	182				
Granit	2,75	182	. .	10000 bis 5000		
Kalk, gebrannt . . .	0,83	55				
gelöscht	1,38	91				
Kalkstein	2,6	172	. .	9000 bis 300		
Portlandkalk .	. . . .	. .	900	6000	1600000	1000
lithographischer Stein	. . . .	. .	450			
oolitischer Kalk	. . .	. .	200			
Kies	1,9	125				
Kieselschiefer	2,7	178				
Kreide . . . . , .	2,2	145				
Luft, atmosphärische .	0,001228	0,08105				
Marmor	2,7	178	. .	11000 bis 4000		
Mauerwerk, rauhes v. kalkigen od. kieseligen Steinen	2,	132				
von Granit oder basaltische Steine	2,4	158				
von Ziegelsteinen	1,8	119				
Mergel	1,9	125				
Mörtel	1,7	112	50	500		
hydraulischer dito	. . .	. .	100	700		
Porphyr	2,8	185				
Puzzolanerde	1,2	79				
Sand, Flußsand . . .	1,9	125				
fein und trocken	1,4	92				
Sandstein	2,4	158	750 bis 6	10000 bis 60	. .	700
Schiefer	2,7	178				
Serpentin	2,7	178				
Steinkohle	1,3	86				
Thon	1,9	125				

Bezeichnung der Materialien.	Spezifisches Gewicht.	Gewicht Eines Kubikfußes in Pfunden.	Absolute Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden λ	Rückwirkende Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden $\varkappa$	Elastizitäts-Model für den Quadratzoll in Pfunden E	Brechungskoeffizient für die relative Festigkeit auf den Quadratzoll in Pfunden ε.
Wasser, destillirt bei 15° R.	1,	66	. . .	. . . . .	330000	
Seewasser . .	1,035	68				
Eis	0,92	61				
Ziegel, Mauerziegel .	1,9	125	280 bis 120	2000 bis 500	. .	300
Dachziegel . .	1,8	119				
3. Holzarten.						
Ahorn	0,7	46	17000	. . . .	. .	9800
Akazie	0,71	47	14000	. . . .	1200000	11000
Apfelbaum, zahmer .	0,77	51	15000			
wilder . . .	0,76	50	. .	6700		
Birke	0,76	50	15000	4700 grün 6600 trocken	1600000	9500
Birnbaum	0,7	46	10000	7700		
Buche (Rothbuche) . .	0,79	52	12000	8000 grün 9600 trocken	1400000	11000
Buchsbaum	0,96	63	20000	10500 trocken		
Ebenholz	1,1	73				
Eiche	1, grün 0,85 trocken	66 56	11000	4600 grün 9800 trocken	1800000	11000
Erle	0,64	42	15000	7100	. .	10000
Esche	0,77	51	18000	9300	1600000	11000
Fichte (Rothtanne) . .	0,5	33	12000	5500	2100000	10000
Flieder	0,7	46	12000	8700		
Hagedorn	0,9	59	11000			
Hainbuche	0,76	50	20000	7500		
Hanf in Seilen, neu .	. . .	. .	8000			
alt .	. . .	. .	6000			
Hasel	0,6	40	18000			
Kastanienbaum . . .	0,6	40	12000			
Kiefer	0,7	46	12000	6300	1700000	10000
Kork	0,24	16				
Lerche	0,55	36	10000	3300 grün 5700 trocken	1300000	5200 7100
Linde	0,58	38	18000			
Mahagoni, amerikanisch	0,6	40				
spanisch	0,8	53	14000	8400	1600000	7800
Pappel, italienische .	0,38	25	6000	3200 grün 5300 trocken	. .	6000
holländische . .	0,55	36				
Pflaumenbaum . . .	0,77	51	12000	3800 grün 9600 trocken		

Bezeichnung der Materialien.	Spezifisches Gewicht.	Gewicht Eines Kubikfußes in Pfunden	Absolute Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden λ.	Rückwirkende Festigkeit für den Quadratzoll in Pfunden $\varkappa$.	Elastizitäts-Model für den Quadratzoll in Pfunden E.	Brechungskoeffizient für die relative Festigkeit auf den Quadratzoll in Pfunden ε.
Platane	0,64	42	12000			
Pockholz	1,3	86	12000			
Rohr, spanisches . . .	0,4	26	6000			
Tanne (Weißtanne) .	0,55	36	12000	. . . .	1900000	10500
Thekabaum	0,65	43	16000	12500	2500000	14500
Ulme	0,7	44	15000	10400	1400000	7600
Walnußbaum	0,67	44	8000	6800	. .	8900
Weide	0,57	38	15000	. . . .	. .	6700
Weinstock	1,32	87				
Zeder, von Canada .	0,8	53	12000	5200	. .	7600
4. Animalische Stoffe.						
Elfenbein	1,87	123	17000			
Fischbein	. . .	. .	8000	. . . .	840000	
Horn (Ochsen=) . . .	1,69	112	9000			
Knochen (Ochsen=) . .	1,66	110	5000			

Bemerk. Die in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Angaben für die rückwirkende Festigkeit verschiedener Hölzer sind die Resultate der kürzlich von Hodgkinson angestellten Versuche, und beziehen sich auf prismatische Körper von so geringer Höhe, daß der Bruch nur durch Zerdrückung erfolgt. Hinsichtlich des Widerstandes gegen das Zerknicken s. §. 432.

Die übrigen Kolonnen des englischen Originales sind mit Hülfe der physikalichen Tabellen von Schubarth, Berlin 1841, und der **Application de la Mécanique par Taffe, Paris 1843**, möglichst vervollständigt. Außerdem sind nur die mittleren Zahlenwerthe darin aufgenommen, wie sie für den Techniker von Wichtigkeit sein können. Hinsichtlich der Anwendung auf die Praxis s. §. 436.

Tabelle XI.

Werthe einiger wichtigen Zahlen und Zusammenstellung der Maaßen und Gewichte verschiedener Länder.

$\pi \ldots\ldots = 3{,}1415927$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots = 0{,}7071068$
$\log.\text{vulg.}\,\pi = 0{,}4971499$	$\pi\sqrt{2} \ldots = 4{,}4428829$
$\log.\text{nat.}\,\pi = 1{,}1447299$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \ldots = 2{,}2214415$
$\frac{1}{\pi} \ldots\ldots = 0{,}3183099$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \ldots = 0{,}4501582$
$\pi^2 \ldots\ldots = 9{,}8696044$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ldots = 1{,}2533141$
$\frac{1}{\pi^2} \ldots\ldots = 0{,}1013212$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \ldots = 0{,}7978846$
$\sqrt{\pi} \ldots = 1{,}7724538$	
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \ldots = 0{,}5641896$	
$\sqrt{2} \ldots = 1{,}4142136$	

Basis der natürlichen Logarithmen $e = \ldots\ldots$ 2,7182818

$\log.\text{vulg.}\,e = \frac{1}{\log.\text{nat.}\,10}$ = Model der gewöhnlichen Logarithmen $= \ldots\ldots$ 0,4342945

$\log.\text{vulg.}\,n = \ldots\ldots$ $0{,}4342945\ \log.\text{nat.}\,n$

$\log.\text{nat.}\,10 = \ldots\ldots$ 2,3025851

$\log.\text{nat.}\,n = \ldots\ldots$ $2{,}3025851\ \log.\text{vulg.}\,n$

Länge des Bogens von 1^0, dessen Halbmesser = 1 ist, 0,017453293

— — $1'$ — — 0,000290888

— — $1''$ — — 0,000004848

Grade eines Bogens, dessen Länge gleich dem Halbmesser 1 ist, ... $57{,}295780^0$

Inhalt einer Kugel, deren Halbmesser = 1 ist, $\frac{4}{3}\pi =$ 4,18879

g für Berlin $= \ldots\ldots$ 31,2644

$\sqrt{g}$ für Berlin $= \ldots\ldots$ 5,5914

$\log.\text{vulg.}\,g$ für Berlin $= \ldots\ldots$ 1,4950501

1 preußischer oder rheinländischer Fuß = . 0,3138535 Meter

1 preußisches oder kölnisches Pfund = . . 0,4677113 Kilogr.

Ort	1 Fuß gleich	1 Quadratfuß gleich	1 Kubikfuß gleich	1 Pfund gleich	1 Arbeitseinheit oder 1 Pfund × 1 Fuß gleich	1 Kubikfuß Wasser bei 15° R. wiegt	Werth von g	
	preußische Fuß	preußische Quadratfuß	preußische Kubikfuß	preußische Pfund	preuß. Pfund × Fuß	dortige Pfund *)	in dortigen Fußen.	in preußischen Fußen
Berlin	1,	1,	1,	1,	1,	66,	31,264	31,264
Bern	0,95586	0,91367	0,87334	1,06903	1,02185	53,918	32,691	31,248
Braunschweig	0,90922	0,82668	0,75163	1,	0,90922	49,608	34,385	31,264
Darmstadt	0,79655	0,63449	0,50540	1,06903	0,85154	31,202	39,240	31,256
Dresden	0,90252	0,81455	0,73515	0,99833	0,90102	48,601	34,636	31,260
Hannover	0,93035	0,86556	0,80527	1,04680	0,97390	50,772	33,604	31,264
Karlsruhe	0,95586	0,91367	0,87334	1,06903	1,02185	53,918	32,697	31,254
Kassel	0,90778	0,82407	0,74807	1,03493	0,93950	47,706	34,436	31,261
London	0,97114	0,94311	0,91589	0,96942	0,94144	62,355	32,191	31,261
München	0,92992	0,86475	0,80415	1,19734	1,11343	44,326	33,607	31,251
Paris	m=3,18620	$m.c$=10,15187	$m.c.c$= 32,34588	k=2,13807	$k.m$=6,81232	$m.c.c$= 1000^k (bei 3,9°)	9^m,809	31,253
Petersburg	. . .	. . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . .	31,287
Stuttgart	0,91281	0,83323	0,76058	1,00472	0,91713	49,962	34,238	31,253
Wien	1,00717	1,01438	1,02165	1,19734	1,20592	56,315	31,029	31,251

*) Um das Gewicht Eines Kubikfußes Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit bei 3,9° **R.** zu erfahren, hat man die Zahlen dieser Kolonne, mit Ausnahme der für Paris, mit 1,002 zu multipliziren.

Verfahren behuf Reduktion einer für preußische Einheiten aufgestellten Formel auf die Maaßen eines anderen Landes.

Wenn sich in irgend einer Formel

$$F(a, b, c, \ldots) = \Phi(d, e, f, \ldots)$$

die veränderlichen Größen $a, b, c, \ldots, d, e, f, \ldots$ auf preußische Maaßen und Gewichte beziehen, und man will dieselben für die Maaßen eines anderen Landes X umformen; so sei

1	Einheit	von	a	des	Landes X	$= \alpha$	preußischen	Einheiten
1	»	»	b	»	»	» $= \beta$	»	»
1	»	»	c	»	»	» $= \gamma$	»	»
1	»	»	d	»	«	» $= \delta$	»	»

u. s. w.;

alsdann hat man

a	Einheit	des	Landes	X	$= \alpha a$	preußischen	Einheiten
b	»	»	»	»	$= \beta b$	»	»
c	»	»	»	»	$= \gamma c$	»	»
d	»	»	»	»	$= \delta d$	»	»

u. s. w.

Substituirt man nun die Größen αa, βb, γc etc., welche sich auf preußische Maaßen beziehen, in die obige Formel; so erhält man

$$F(\alpha a, \beta b, \gamma c, \ldots) = \Phi(\delta d, \varepsilon e, \varphi f, \ldots).$$

In dieser neuen Gleichung sind die Größen $a, b, c, \ldots d, e, f, \ldots$ nach den Einheiten des Landes X zu messen.